強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第 1 問（数Ⅲ）

(1)　楕円 $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ について，楕円の外部の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から，この楕円に引いた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ．

(2)　(1) と同形の楕円が，xy 平面の第 1 象限で，x 軸，y 軸双方に接しながら，可能な範囲を動くとき，楕円の中心の描く軌跡を求めよ．

＜解答＞

(1)　点 P は楕円の外部の点より

$$\frac{p^2}{4^2}+\frac{q^2}{3^2}>1 \quad \cdots\cdots(*)$$

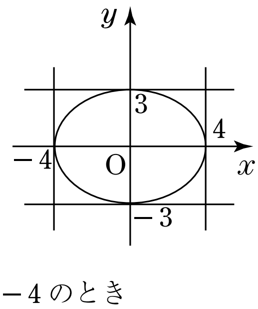
である．

(i)　$p=4,\ -4$ のとき

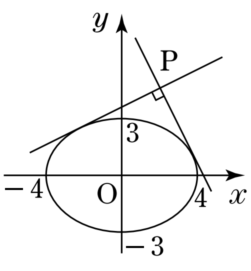
直線 $x=4,\ -4$ はこの楕円の接線であり．これに直交する楕円の接線は $y=3, -3$ であるから，このときの点 P は

$$(4,\ 3),\ (4,\ -3),\ (-4,\ 3),\ (-4,\ -3)$$

である (これらは $(*)$ を満たす).



(ii)　$p \neq 4,\ -4$ のとき



点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から楕円に引いた接線の傾きを m とすると接線の方程式は

$$l : y=m(x-p)+q$$
$$\iff \quad y=mx-(mp-q)$$

となる．これと，楕円の方程式 $9x^2+16y^2=144$ を連立して

$$9x^2+16\{mx-(mp-q)\}^2=144$$
$$\iff \quad (9+16m^2)x^2-32m(mp-q)x +16(mp-q)^2-144=0$$

であり，楕円と直線 l が接することからこの 2 次方程式が重解をもつので，判別式を D として

$$\frac{D}{4}=0$$
$$\iff \quad 16^2m^2(mp-q)^2 -(9+16m^2)\cdot\{16(mp-q)^2-144\}=0$$
$$\iff \quad 9\{16(mp-q)^2-144\}-16m^2\cdot 144=0$$
$$\iff \quad (mp-q)^2-9-16m^2=0$$
$$\iff \quad (p^2-16)m^2-2pqm+q^2-9=0 \quad \cdots\cdots(**)$$

となる．

$p^2 \neq 16$ に注意すると，条件は，この 2 次方程式が 2 つの実数解をもち，かつそれらの積が -1 になることであるから

$$\frac{9-q^2}{16-p^2}=-1 \quad \iff \quad p^2+q^2=25$$

となる (2 解の積が負であれば，その 2 解は実数であることに注意)．このときも条件 $(*)$ は満たされる．

(i) の場合の 4 点も，等式

$$p^2+q^2=25$$

を満たすことから，求める点 P の軌跡は

$$円 : x^2+y^2=25$$

である．

(2)　(1) より，直交する 2 接線の交点と楕円の中心との距離は常に 5 である．したがって，第 1 象限で x 軸，y 軸の双方に接しながら動く楕円の中心は，常に

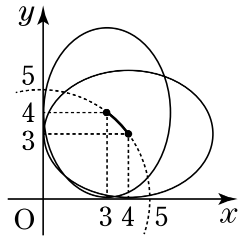
$$円 : x^2+y^2=25$$

上にある．さらに，楕円の中心と接線の距離が最小になるのは，(1) の楕円で考えた時の直線

$y=3,\ -3$ にあたるものであるから，楕円の中心の動く範囲は

円 : $x^2+y^2=25$ の $3 \leqq x \leqq 4$ の部分

である．



（解答中の下線部の証明）

楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上の点

$(4\cos\theta,\ 3\sin\theta)\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$

における接線の方程式は

$$\frac{\cos\theta}{4}x+\frac{\sin\theta}{3}y=1$$
$$\iff (3\cos\theta)x+(4\sin\theta)y=12$$

である．これと楕円の中心 O$(0,\ 0)$ との距離は

$$\frac{12}{\sqrt{9\cos^2\theta+16\sin^2\theta}}=\frac{12}{\sqrt{9+7\sin^2\theta}}$$

となり，これが最小になるのは

$$\sin^2\theta=1 \iff \theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$$

のときである．よって，その接線の方程式は

$y=3,\ -3$

である．

＜(ii) の場合の別解＞

$p \fallingdotseq 4,\ -4$ のとき

点 P$(p,\ q)$ から楕円に引いた接線の傾きを m とすると接線の方程式は

$l : y=m(x-p)+q$

となる．図形全体を y 軸方向に $\dfrac{4}{3}$ 倍すると，楕円は円 : $x^2+y^2=4$ に移り，楕円の接線 l は

$$\frac{3}{4}y=m(x-p)+q$$
$$\iff 4mx-3y-4(mp-q)=0$$

に移る．これが，円 : $x^2+y^2=4$ の接線であるから，中心と直線との距離が半径に等しい条件より

$$\frac{|-4(mp-q)|}{\sqrt{4^2m^2+3^2}}=4$$
$$\iff |mp-q|=\sqrt{16m^2+9}$$

が成立する．両辺正より，2 乗して整理すると

$$(16-p^2)m^2+2pqm+9-q^2=0$$

となる．

(これは, 前頁の解答の (**) と同じ方程式なので, 以下は解答と同様)

＜コメント＞

数学科の川崎です．今回は楕円の準円と言われる有名テーマを扱った問題を出題しました．うまいことやらないと計算が大変になりますが，扱っている内容は 2 次方程式なので，是非とも解けるようにしましょう．

以下，設問ごとの補足です．

(1)　まず接線の立式がポイントになります．接点を文字でおいて接線の公式を用い，それが点 P を通るとしても良いですが，通る点 P が分かっていることから傾き m を変数として設定しました．その際，y 軸に平行な直線は $y=mx+n$ の形に表せないので，分けて考えなくてはいけません．解答中の (i)，(ii) の場合分けはここからきています．実際，(i) の場合の 4 点を求めておけば，答えが円だということを知っていたら直ちに答えの方程式は分かります．もちろん円全体になることは, ちゃんと証明が必要ですが….

さて，接線を $y=mx-(mp-q)$ とおいたのは良いのですが，これでは「接線」という条件が反映されていません．そこで，楕円の方程式と連立して 2 次方程式を作り，それが重解を持つ条件を

考えます．2 次曲線と直線は

「連立しても，所詮２次」

ですので，接する条件や共有点に関する条件は判別式で処理することができます．ここでの計算のコツは，$mp-q$ というかたまりを崩さずに計算することです．判別式の中で，$16^2m^2(mp-q)^2$ という項は消えますので，これを展開せずに計算すると見通しが良くなります．知ってて得するワンポイントです．また，これは楕円の場合限定の話になりますが，＜別解＞のように，楕円を円にして，接する条件を立式することもできます．円にする最大のメリットは，中心と接点を結ぶ直線が接線に直交することで，これから点と直線の距離公式を用いることが可能になります．計算量がはるかに減りますので，この方法も是非マスターしてください．

これで，傾き m についての 2 次方程式が得られます．あとは直交条件を立式すればよく，m が 2 個存在 (接線が 2 本存在) し，それらの積が -1 という条件を考えます．2 解の積ですから，当然解と係数の関係を使いますね．$p^2 \neq 16$ がここに効いていることもしっかり確認しておいてください．条件を整理すればめでたく円の方程式が出てきて，さらに (i) の場合の 4 点もこの円周上にあります．この円はもともとの楕円を内側に含みますので，点 P が楕円の外部という条件 (*) も満たされ一件落着です．

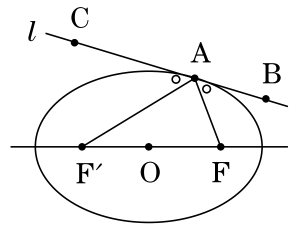
(2)　(1) が強力なヒントになっていることに気付きましょう．x 軸，y 軸にともに楕円が接するということは，言い換えれば，楕円の接線が原点で直交しているということです．すると，(1) から楕円の中心と原点との距離は 5 であることが分かり，求める軌跡は円の一部になります．あとは，どこからどこまで動けるのかを考えて答えを得ます．

(1) で求めた点 P の軌跡が円になることを幾何的に証明することもできます．今回は問題形式で，その証明をまとめておきましょう．

問

長径 a，短径 b の楕円の中心を O，2 つの焦点を F，F′ とするとき，以下を示せ．

(1)　楕円上の点 A における接線を l とし，l 上に A とは異なる 2 点 B，C を下図のようにとる．このとき ∠BAF＝∠CAF′ であることを示せ．

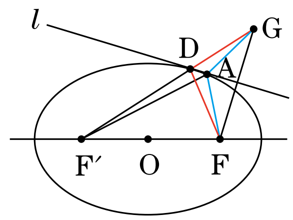


(2)　楕円外の点 P における 2 接線を l_1，l_2 が直交しているとする．F の l_1 についての対称点を G，F′ の l_2 に関する対称点を G′ とするとき，△PG′F ≡ △PF′G であることを示せ．

(3)　(2) の P に関して，$\mathrm{OP}^2=a^2+b^2$ であることを示せ．

＜解答＞

(1)　示すことは，点 F の l に関する対称点を G として，F′，A，G が一直線上にあることと同値である．これを背理法で示す．



F′，A，G が一直線上にないとすると，直線 F′G と l は点 A 以外の交点 D をもつ．

D は楕円の外部の点であるから

$$\mathrm{F'A}+\mathrm{FA}<\mathrm{F'D}+\mathrm{FD} \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

一方，三角不等式から

$$\mathrm{F'A}+\mathrm{GA}>\mathrm{F'D}+\mathrm{DG}\ (=\mathrm{F'G})$$

であり，対称性より GA＝FA，DG＝DF であることから

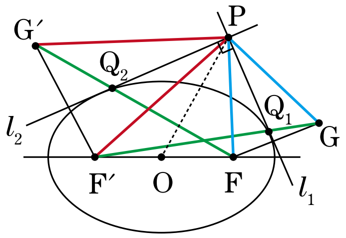
$$\mathrm{F'A}+\mathrm{FA}>\mathrm{F'D}+\mathrm{FD} \quad \cdots\cdots ②$$

である．

①，② は同時に成り立たないことから，これは

矛盾である．よって，題意は示せた．

(2)



　$\triangle \mathrm{PG'F}$ と $\triangle \mathrm{PF'G}$ において，対称性より

$$\mathrm{PG'} = \mathrm{PF'},\ \mathrm{PF} = \mathrm{PG}$$

である．さらに，l_1，l_2 と楕円の接点をそれぞれ $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$ とすると，(1) より，3 点 $\mathrm{F'}$，$\mathrm{Q_1}$，G と 3 点 F，$\mathrm{Q_2}$，$\mathrm{G'}$ はそれぞれ一直線上にあり，

$$\mathrm{F'Q_1} + \mathrm{Q_1G} = \mathrm{F'Q_1} + \mathrm{Q_1F} = 2a$$

$$\therefore\quad \mathrm{F'G} = 2a$$

である．同様にすると

$$\mathrm{G'F} = 2a$$

である．よって

$$\mathrm{G'F} = \mathrm{F'G}$$

である．

　以上より，3 辺相等であるから

$$\triangle \mathrm{PG'F} \equiv \triangle \mathrm{PF'G}$$

である．

(3)　(2) より

$$\angle \mathrm{G'PF'} = \angle \mathrm{GPF}$$

であるから，これらの半分の角度を考えて

$$\angle \mathrm{Q_2PF'} = \angle \mathrm{Q_1PG}$$

も成り立つ．すると

$$\angle \mathrm{F'PG} = 90^\circ$$

となるので，三平方の定理より

$$\mathrm{F'P}^2 + \mathrm{GP}^2 = \mathrm{F'G}^2 = 4a^2$$

である．これと $\mathrm{GP} = \mathrm{FP}$ より

$$\mathrm{F'P}^2 + \mathrm{FP}^2 = 4a^2 \quad \cdots\cdots ③$$

となる．

　さらに，$\triangle \mathrm{F'PF}$ において中線定理より

$$\mathrm{F'P}^2 + \mathrm{FP}^2 = 2(\mathrm{OP}^2 + \mathrm{OF}^2)$$

であるから，③ と

$$\mathrm{OF}^2 = a^2 - b^2$$

であることから

$$\mathrm{OP}^2 = a^2 + b^2$$

が成り立つ．

□

　いかがだったでしょうか？前提とする知識が要りますが，幾何でやると計算はほぼ不要ですね．今の問題の (1) は有名事実で，これだけで出題されることもありますので，是非できるようにしておいてください．

　今回は楕円で出題しましたが，双曲線にも準円があります．余裕のある人は，双曲線に関しても計算 (もしくは幾何的考察) をしてみてください．

　それでは今回はここまでにしたいと思います．また次回．

（数学科　川崎）