強者の戦略

それでは解答編です．今回は

ハイポサイクロイド（内サイクロイド）

の考え方に加えて，**エピサイクロイド（外サイクロイド）**，さらに一般的な**トコロイド**について考えていきたいと思います．みなさんが聞いたことあるような有名曲線も登場します．結果を覚える必要はありませんが，すべて同じ考え方で処理できるので今回いまいちできなかった人は考え方をマスターしましょう！

数学第１問（III）

原点 O を中心とする半径 4 の円 E がある．半径 1 の円 C が，内部から E に接しながらすべることなく転がって反時計回りに 1 周する．このとき，円 C の周上に固定された点 P の軌跡を考える．ただし，はじめに点 P は点 (4，0) の位置にあるものとする．

(1)　x 軸と円 C の中心のなす角度が $\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ となったときの点 P の座標 $(x,\ y)$ を θ を用いて表せ．

(2)　点 P の軌跡を D とするとき，D の長さを求めよ．

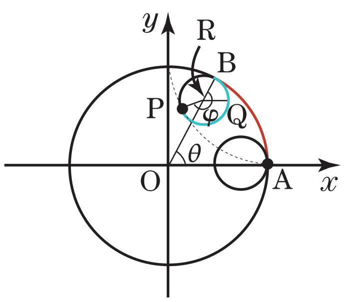
(3)　D と x 軸，y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

《(1) の考え方》

この手の問題で大事な考え方は，「**円弧の長さが等しいものを探す**」ということです．これを使うと図の θ と φ の関係式を導くことができます．O からの距離がわかり，条件で角度を提示していることからベクトルと極座標（っぽい考え方）を用いると意外にすんなりと解けてしまいます．一般に

$$\text{ベクトル}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\text{を O の周りに}\alpha\text{だけ回転したものは}\begin{pmatrix}\cos(\theta+\alpha)\\ \sin(\theta+\alpha)\end{pmatrix}\text{である}$$

ことを用いましょう．



弧 AB と弧 BP の長さが等しい！

それでは解答にうつります．

《(1) の解答》

図において円 E における弧 AB の長さと円 C における弧 BP の長さが等しいので

$$4\theta=\varphi$$

となる．また

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\begin{pmatrix}3\cos\theta\\3\sin\theta\end{pmatrix}+\overrightarrow{\mathrm{RP}}\quad(\because\ \mathrm{OR}=\mathrm{OB}-\mathrm{RB}=3)$$

である．ここで $\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{RB}}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ を O の周りに $2\pi-\varphi=2\pi-4\theta$ ($\because$ $4\theta=\varphi$) だけ回転したものであるから

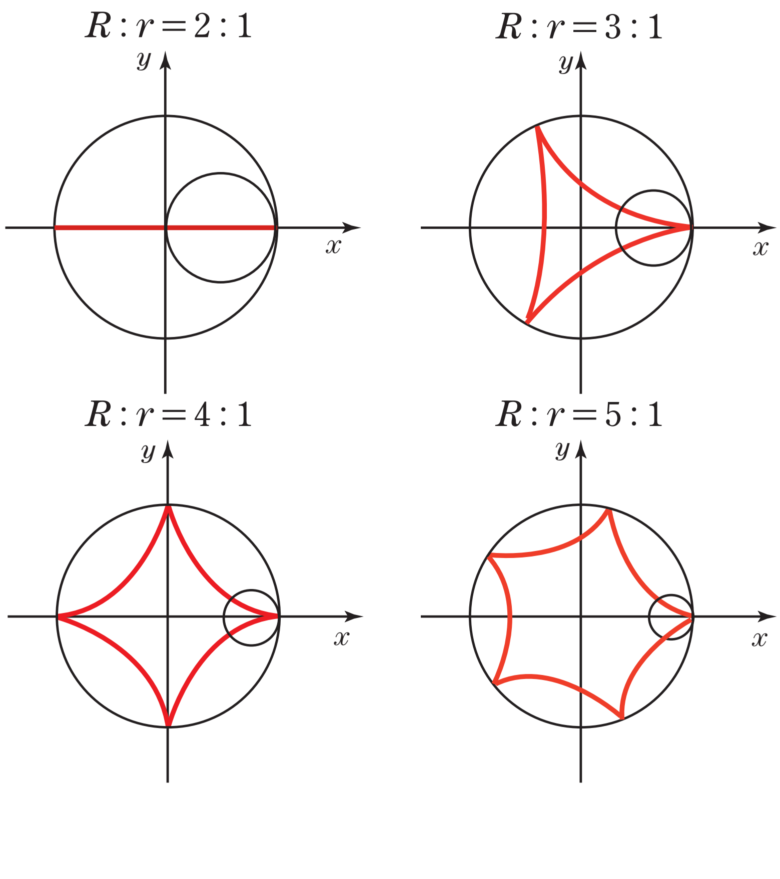
$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\begin{pmatrix}\cos\{\theta+(2\pi-4\theta)\}\\\sin\{\theta+(2\pi-4\theta)\}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos3\theta\\-\sin3\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cos^3\theta-3\cos\theta\\4\sin^3\theta-3\sin\theta\end{pmatrix}$$

となる．ゆえに

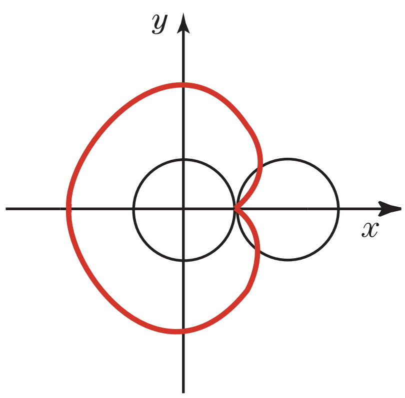
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}4\cos^3\theta\\4\sin^3\theta\end{pmatrix}$$

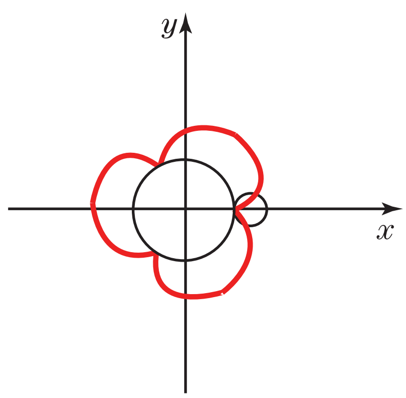
であるから $\mathrm{P}(4\cos^3\theta,\ 4\sin^3\theta)$ である．

・・・とまあ，アステロイドがでてきましたね！円の内側を円が接しながら滑らずに回るときの円上の点の軌跡を**ハイポサイクロイド**または**内サイクロイド**といいます．特に今回のように外側の円の半径 R と内側の円の半径 r の比が $4:1$ になるときは**アステロイド**になります． $R:r=2:1$ のときの軌跡は直線になります（読者はこれを確かめてみて下さい）．下の図は $R:r$ をいろいろ変えたものですが，$R:r=10:3$ のものが 2004 年の東大で出題されています．



ちなみに“内”があるなら“外”もあるはずですよね．もちろん**外サイクロイド**（**エピサイクロイド**）も存在します．ハイポサイクロイドが大きい円の内部で小さな円が回転していたのに対し，円の外部で円が回転したときの外側の円上の定点の描く軌跡がエピサイクロイドです．これも今回と同様に曲線の長さに絡めて出題されます．$R:r=1:1$ であるときが**カージオイド**（心臓形）です．告白するときに使えば頭がいいことはアピールできるのではないでしょうか．（注：普通の女子はドン引きすると思いますのでやらない方が懸命です）





さらに円上の点に限らず円の内側や外側にある定点が円が回転して相対的に動くときの軌跡を**トコロイド**といいます．みなさんがよく知っているサイクロイドや今回出てきたハイポサイクロイド，エピサイクロイドもトコロイドの特殊なものと考えることができるのです．

ちょっと長くなったので話を元に戻して (2) を考えていきましょう．(1) から所詮はパラメーターの曲線の長さになりますので

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqq t \leqq \beta) \text{ の曲線の長さ } l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

に代入してさくっと計算していきます．ちなみに被積分関数は速さ (= 速度ベクトルの大きさ) になっています．

《(2) の解答》

(1) より

$$\frac{dx}{d\theta}=-12\sin\theta\cos^2\theta\,,\ \frac{dy}{d\theta}=12\sin^2\theta\cos\theta$$

であるから

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= 12^2\left(\sin^2\theta\cos^4\theta+\sin^4\theta\cos^2\theta\right)\\ &= 12^2\sin^2\theta\cos^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\\ &= 12^2\sin^2\theta\cos^2\theta\end{aligned}$$

となり，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\sin\theta\cos\theta \geqq 0$ より

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=12\sin\theta\cos\theta=6\sin 2\theta$$

となる．ゆえに求める長さを l とすると

$$\begin{aligned} l &= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\, d\theta \\ &= 6\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 6 \end{aligned}$$

である．

さて，最後の (3) ですが，パラメーターの面積ですが，グラフの概形から x，y で立式して計算をすすめようとすると $\sin^4\theta$，$\sin^6\theta$ の積分をしなければいけません．一般的に

$\sin\theta$ の積分　→　公式
$\sin^2\theta$，$\sin^3\theta$ の積分　→　2 倍角の公式，3 倍角の公式の利用
$\sin^n\theta$ の積分　→　部分積分を用いて漸化式を作成

を覚えておけば十分ではないでしょうか．これ以外にも $\cos^n\theta$，$\tan^n\theta$，$(\log x)^n$ の積分で n が大きいものは漸化式を作成して考えましょう．以下解答です．

《(3) の解答》

求める面積を S とすると $y \geqq 0$ より

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y\, dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 4\sin^3\theta(-12\sin\theta\cos^2\theta)d\theta \\ &= 48\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)d\theta \\ &= 48\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4\theta-\sin^6\theta)d\theta \end{aligned}$$

である．ここで n を自然数として $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta$ とすると $S=48(I_4-I_6)$ であり

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta(-\cos\theta)'d\theta \\ &= \Big[-\sin^n\theta\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\cos^2\theta d\theta \\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-1}\theta-\sin^{n+1}\theta)d\theta \\ &= nI_{n-1}-nI_{n+1} \end{aligned}$$

であるから $I_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}I_{n-1}\,(n \geqq 2)$ となる．

ゆえに

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \frac{3}{4}I_2 = \frac{3}{16}\pi \\
I_6 &= \frac{5}{6}I_4 = \frac{15}{96}\pi
\end{aligned}
$$

となるので

$$S = 48\left(\frac{3}{16}\pi - \frac{15}{96}\pi\right) = \frac{3}{2}\pi$$

である.

～おわりに～

今回は恐らく今年最後，かつ入試直前ということで結構欲張りな内容にしてみました．もちろんセンター試験という高い壁を乗り越えないといけませんが，このページをみているみなさんなら大丈夫でしょう！直前に準備を完璧にして試験に臨んで下さい．成功をお祈りしています！

（数学科　竹本）