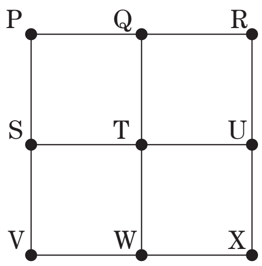
強者の戦略

今回の問題は【1996 愛知教育大学】の入試問題から出題しました.

それでは，まず問題の確認です.

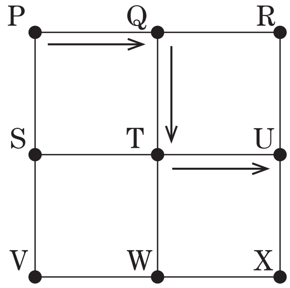
> 問題
>
> K大学では次のようなイヌ型ロボットの開発に成功した．このロボットは右図の格子上を進み，格子点（図中の●）に達するとそこに印を付ける．その後，進む向きを定めてまた前進するのだが，既に印の付けられた格子点には行くことができない.
>
> 
>
>
> また，進む向きの定め方は次の法則に従う.
>
> ①　隣接する格子点すべてに印が付いているときは，そこで止まる.
>
> ②　隣接する格子点で印のついていないものが少なくとも1つあるときは，必ずそれらのどれかに進む.
>
> ③　隣接する格子点で印の付いていないものが2点以上ある場合は
>
> [ア]　正面の点に印が付いていなければ直進する確率はpである.
>
> [イ]　左右の点とも印がついていなければ左右に進む確率は等しい.
>
> このとき，以下の問いに答えよ．ただし，出発点においても上の①～③に従って進行方向を定め，かつ印を付けて行くものとする.
>
> (1)　このロボットを，点PにQを正面として置いて出発させるとき，すべての格子点P～Xに印を付けて止まる確率を求めよ.
>
> (2)　単位時間に1回ずつ移動する2機のロボット「ポチ」と「コロ」を使ってゲームをする．ポチを点PにQを正面として置き，コロを点XにWを正面として置き，同時に出発させてより長い時間動いていたほうが勝ちとする．ここで，同時に同じ点に到達した場合は引き分けとし, 再試合は行わない. また, 他方のロボットが印を付けた点にも到達できないものとする.
>
> さて，ポチの直進の確率をp，コロの直進の確率をqとしたとき，ポチの勝つ確率を求めよ．また，pとqの間にどのような関係があれば，ポチの勝つ確率がコロの勝つ確率を上回るだろうか.

［(1) 考察］

最初の1，2回は，どのように進んでもすべての格子点を通れなくなることがありませんが，たとえば

P → Q → T → U

と進んでしまうと

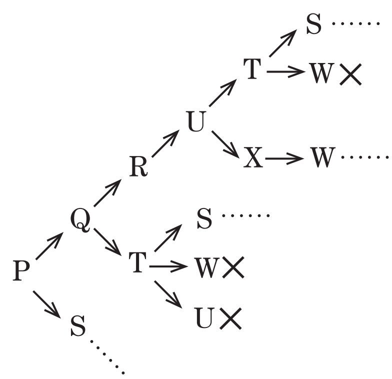


となり，この後Rに進むとそれ以上進めなくなり，Xに進むとRが通れなくなり不適です．闇雲に考えると，適する進み方と不適な進み方がデタラメに混ざり合い，把握しづらくなります．このような場合は，所詮格子点が9つしかないことから

場合の数の総数が少なそうなら

樹形図で書きだす

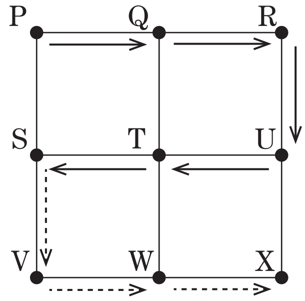
を用いましょう．特に総数が100通り以下の場合は，全体像をつかむためにも有効です．最初のほうを少しやってみると



となります．最後に×のついているものは不適な進み方です．加えて，実際に書きだしてみると，たとえば

P → Q → R → U → T → S

と進むと



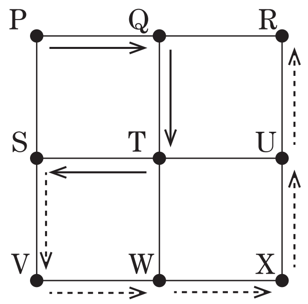
というように，その後は必ず

(S→) V→W→X

と進むので，S までの確率を考えれば，その後は進み方が 1 つに決まることになり，その進み方を選ぶ確率は 1 になります．他にも

P→Q→T→S

と進むと



のように，その後は必ず

(S→) V→W→X→U→R

と進み，すべての格子点を通ります．

以上をまとめると，解答は次のようになります．

［解答］

(1)　すべての格子点に印を付けて止まるような進み方を，通る格子点の順番で考えると

P→Q→R→U→T→S

P→Q→R→U→X→W

P→Q→T→S

P→S→T→Q

P→S→V→W→T→Q

P→S→V→W→X→U

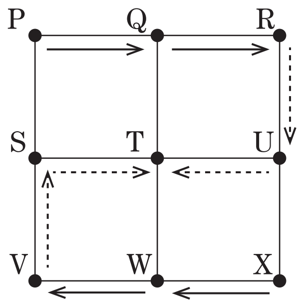
の 6 パターンのとき，最後の格子点以降は進み方が 1 通りに決まり，かつ，すべての格子点を通る．また，他の進み方はすべての格子点を通ることができない．以上より，求める確率は

$$
\begin{aligned}
&p^3(1-p)+p^3\\
&\quad +p(1-p)^2\cdot\frac{1}{2}+(1-p)^3\cdot\frac{1}{2}\\
&\qquad +p^2(1-p)^2+p^2(1-p)\\
&=p^3\{(1-p)+1\}\\
&\quad +\frac{1}{2}(1-p)^2\{p+(1-p)\}\\
&\qquad +p^2(1-p)\{(1-p)+1\}\\
&=\{p^3+p^2(1-p)\}(2-p)+\frac{1}{2}(1-p)^2\\
&=-p^3+\frac{5}{2}p^2-p+\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

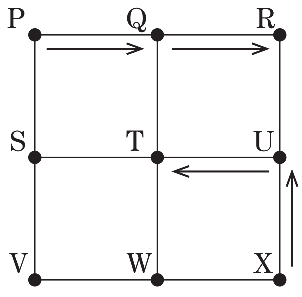
である．

［(2) 考察 1］

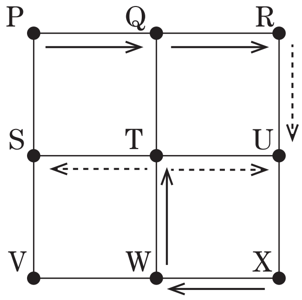
まず最初の 1 回は，ポチとコロがどのように進んでも，どちらも進めなくなることはありません．次に 2 回進んだときに



となると，どちらも 4 回ずつ進み止まるため引き分けが確定するので，そうでない場合を考えてみます．たとえば



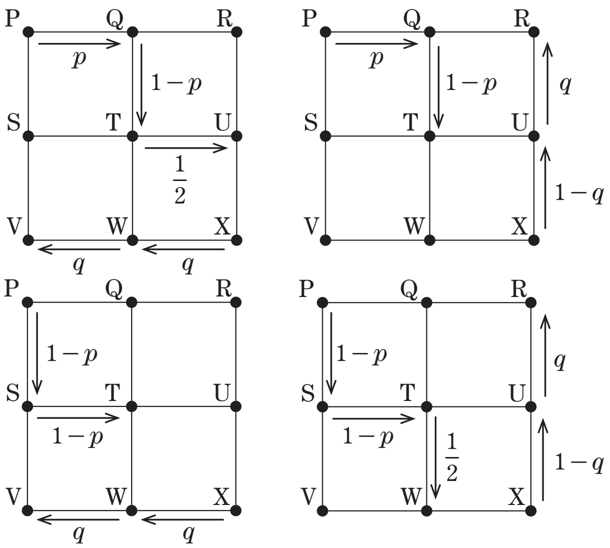
のようになると，ポチは動けないのにコロは動けるので，ポチの負けが確定します．また



となると，ポチは最大であと 1 回しか進めないのに，コロは少なくともあと 1 回以上は進めるので，引き分けかポチの負けになることがわかります．以上のように，(1) と同様に具体的にすべての場合を調べていくと，ポチの勝つパターンが 4 パターンぐらいしかないことに気づけます．まず，その部分だけに注目して，ポチの勝つ確率を考えてみましょう．

［(2) 解答下書き］

ポチが勝つような進み方を考えると，以下の 4 パターンのときのみである．



以上より，ポチの勝つ確率は

$$\frac{1}{2}p(1-p)q^2+p(1-p)(1-q)q$$
$$+(1-p)^2q^2+\frac{1}{2}(1-p)^2(1-q)q$$
$$=\frac{1}{2}(1-p)q\{pq+2p(1-q)q$$
$$+2(1-p)+(1-p)(1-q)\}$$
$$=\frac{1}{2}(1-p)q(1+p+q-2pq)$$

である．

［(2) 考察２］

さて，ここからは強者向けに，少し答案をグレードアップしてみましょう．

強者の答案では，今回のような問題のとき条件に適する場合を書くだけではなく，他の場合は条件に適さないことも主張していきたいところです．(1) の場合は，動くロボットが 1 体なので，不適になる場合も含めすべての場合を樹形図で調べても（もしくは調べたフリをして，答案を作成しても）大きな影響はないのですが，(2) の場合，動くロボットが 2 体に増えたため, ポチが勝てない（引き分け or 負ける）場合もすべて樹形図で書こうとすると大変なことになりますし，容易にはすべての場合を想像できません．すなわち，不適になる場合については，樹形図以外の方法で説明しておいたほうが採点者に伝わりやすそうだ，と判断できます．

ここまでを踏まえた上で［(2) 考察１］と［(2) 解答下書き］を見てみると

- 1 回進んだだけでは，勝ち負けは確定しない
- 2 回進んだときに，ポチが勝てないことが確定する場合がある
- 2 回進んだときに，ポチが T，コロが T 以外にいれば，ポチの勝てる可能性が残る

ということがわかります．つまり「2 回進んだ後のポチとコロの居場所」で場合分けをすれば，不適になる場合を先に除いてポチが勝てる可能性が残る場合だけに絞り込む，という必要条件っぽい書き方ができそうです．このことも盛り込んで，解答の清書に移ります．

［(2) 解答清書］

(2)　2 回ずつ進んだ時点で，ポチもコロも R，T，V のいずれかにいる．これを踏まえて，まずポチの勝つ確率を求める．2 回の移動後に

i) ポチが $\mathrm{P} \to \mathrm{Q} \to \mathrm{R}$
　コロが $\mathrm{X} \to \mathrm{U} \to \mathrm{T}$ と進んだとき
　　ポチは止まり，コロはまだ進めるのでポチの勝ちはない.

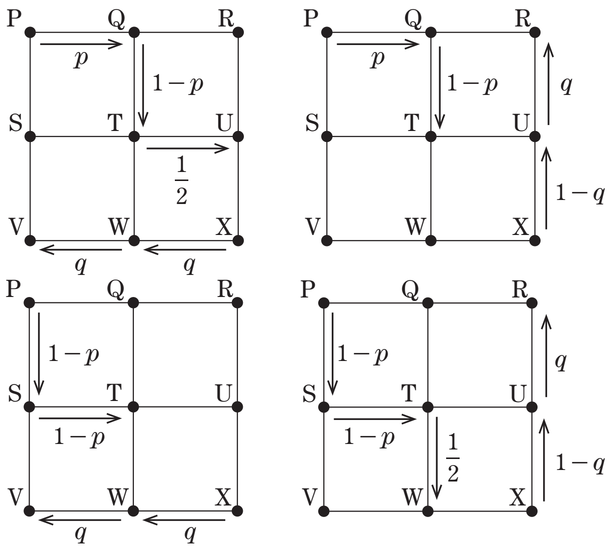
ii) ポチが $\mathrm{P} \to \mathrm{Q} \to \mathrm{R}$
　コロが $\mathrm{X} \to \mathrm{W} \to \mathrm{T}$ と進んだとき
　　ポチは最大あと 1 回しか進めず，コロは少なくともあと 1 回以上進めるので，ポチの勝ちはない.

よって，2 回の移動後にポチが R，コロが T にいるとき，途中の進み方によらずポチの勝ちはない.

同様に，2 回の移動後にポチが V にコロが T にいるときも，ポチの勝ちはない.

また，2 回の移動後にポチが R，コロが V にいるときと，ポチが V，コロが R にいるときは，それぞれあと 2 回進んでともに T で止まるので，引き分けとなりポチの勝ちはない.

以上より，2 回の移動後にポチが T，コロが V または R にいるときにのみ注目し (*)，ポチが勝つような進み方を考えると，以下の 4 パターンのときのみである.



以上より，ポチの勝つ確率は

$$\frac{1}{2}p(1-p)q^2+p(1-p)(1-q)q$$
$$+(1-p)^2q^2+\frac{1}{2}(1-p)^2(1-q)q$$
$$=\frac{1}{2}(1-p)q\{pq+2p(1-q)q$$
$$+2(1-p)+(1-p)(1-q)\}$$
$$=\frac{1}{2}(1-p)q(1+p+q-2pq)$$

である．また，コロの勝つ確率は，対称性より (**) p と q を入れかえて

$$\frac{1}{2}(1-q)p(1+q+p-2qp)$$

である．ここで，ポチの勝つ確率とコロの勝つ確率の差を考えると

$$\frac{1}{2}(1-p)q(1+p+q-2pq)$$
$$-\frac{1}{2}(1-q)p(1+p+q-2qp)$$
$$=\frac{1}{2}(1+p+q-2pq)\{(1-p)q-(1-q)p\}$$
$$=\frac{1}{2}(1+p+q-2pq)(q-p) \quad \cdots\cdots\cdots(***)$$
$$=\frac{1}{2}\{(1-pq)+p+q-pq\}(q-p)$$
$$=\frac{1}{2}\{(1-pq)+p(1-q)+q\}(q-p)$$

であるから，これが正となるための p，q の条件が求める条件である．$0<p<1$ かつ $0<q<1$ より

$$1-pq>0,\ 1-q>0$$

ゆえ

$$(1-pq)+p(1-q)+q>0$$

であるから，ポチの勝つ確率がコロの勝つ確率を上回るための条件は

$$q-p>0 \iff q>p$$

である.

[補足]

((*) について)

ここまでで，今回の設定では「相手より先に，真ん中の T に辿り着かないと絶対に勝ちはない」ということがわかりました．わかってみれば，T ならば

次の進行方向として3つもの選択肢があり，次に進めないという状況に追い込まれにくいことは，直感できると思います．

今回の設定で真ん中のTに相手より先に辿り着くためには，途中で直進ではなく左右への移動を選ばなければならないので，「左右に進む確率を大きくする」$\Longleftrightarrow$「直進する確率を小さくする」ということが，最後の結論である $q>p$ という条件に表れています．今回は「直進の確率も少しぐらい残しておいたほうがいいかも……」と中途半端になるよりも「左右に進める機会があるときは，その確率を1にする！」と思い切ったほうがよいわけです．

((**) について)

ここでいう対称性は次の2点です．

・ポチもコロも，進む向きの定め方について
　p が q に変わる以外は全く同じ決め方をする
・ポチとコロのスタート時点の位置と向きが
　中央の格子点Tに関して点対称である

必ずしも答案で説明する必要はありませんが，対称である理由を自分で説明できるようにしておくのがお勧めです．他の問題において，対称性を用いてよいときと，用いてはいけないときが見分けやすくなるからです．

((***) について)

この積が正となるような p，q の条件を考えたいのですが，右のカッコの $q-p$ は正負を確定できないので，左のカッコに注目します．まず「$-2pq$」のみ符号がマイナスで，この項が正負の確定を妨げていることが即座にわかります．なので，このマイナスを別の項と一緒に考えることで正だと確定できるようにしたいのですが

$$1-2pq$$

としてみても，「$p=q=\dfrac{3}{4}$」のときなどに負になりますし，1つの文字に注目して整理しても

$$(1-2q)p+(q+1)$$

となり，$1-2q$ の部分が正だと確定できません．

以上の考察から，pq の前にある「2」が邪魔をしている，ということに気づけると思います．そこで

$$2pq=pq+pq$$

と2つのかたまりに分ければ，解答のように他の部分と組み合わせることで，正であることを確定できる形に変形できます．p，q はともに0と1の間にあるので，「積 pq も0と1の間にある」とか「$1-p$ や $1-q$ は必ず正になる」などの感覚も大切なのですが，今回のような変形がパッと思いつかなくても，上のような考察をすることで邪魔物を見つけ，対処法を考える習慣をつけると，解ける問題が増えていきます．

(最後に)

今回は，解答の (2) の (*) までで「真ん中のTを先に抑えることが大事」とわかったので，それに合わせてポチの確率を有利になるように調整することで問題を解くことができました．これから皆さんが立ち向かうことになる大学入試でも，同じ事が言えます．過去問などで，難易度や傾向を知り，そこに向けての対策を行えば，闇雲に進み始めるよりも効率的に目標達成に近づくことができます．

研伸館の授業で扱っている問題は「何を抑えるのが大事か」ということについて研究を重ねた上で厳選されたものですから，目標達成に近づくスピードがより速まることは言うまでもありません．

これからも一緒に，大学合格に向けて突き進んでいきましょう．

(数学科　中西)