強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第 1 問（数 Ⅲ）

　すべての実数 x に対して定義された関数 $f(x)$ で，必ずしも連続とは限らないものを考える．いま，$f(x)$ がさらに次の性質を持つとする．

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$f(xy)=f(x)f(y),\ f(1)=1$$

このとき，以下を示せ．

(1)　すべての有理数 x に対して $f(x)=x$ である．

(2)　実数 x，y について，$x \leqq y$ ならば $f(x) \leqq f(y)$ である．

(3)　すべての実数 x に対して，$f(x)=x$ である．

＜解答＞

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \cdots\cdots ①$$
$$f(xy)=f(x)f(y) \quad \cdots\cdots ②$$

とする．

(1)　① で $x=y=0$ として

$$f(0)=2f(0) \iff f(0)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

である．すると，① で $y=-x$ として

$$f(0)=f(x)+f(-x)$$
$$\iff f(-x)=-f(x) \quad \cdots\cdots ④$$

となり，$f(x)$ は奇関数であることが分かる．よって，0 以上の有理数 x に対して，$f(x)=x$ となることを示せば十分である．

　まず，命題

「0 以上の整数 n に対して，$f(n)=n$ となる」 ……（※）

を数学的帰納法で示す．

(i)　$n=0$ のとき

　③ より成立する．

(ii)　$n=k$（k は 0 以上のある整数）のとき

　$f(k)=k$ と仮定すると，① より

$$f(k+1)=f(k)+f(1)$$
$$=k+1$$

となり，$n=k+1$ のときも成立する．

　以上，(i)，(ii) より，（※）は示された．

　すると，自然数 m に対して，② より

$$f(1)=f\left(m\cdot\frac{1}{m}\right)=f(m)\cdot f\left(\frac{1}{m}\right)$$

であり，$f(1)=1$，$f(m)=m$ から

$$f\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{m}$$

となる．

　よって，0 以上の有理数 x を

$$x=\frac{n}{m}\ \text{（m は自然数，n は 0 以上の整数）}$$

と表すと，② より

$$\begin{aligned} f(x)&=f\left(\frac{n}{m}\right)\\ &=f\left(n\cdot\frac{1}{m}\right)\\ &=f(n)\cdot f\left(\frac{1}{m}\right)\\ &=n\cdot\frac{1}{m}\\ &=x \end{aligned}$$

となる．以上で示せた．

(2)　0 以上の実数 t に対して，$\sqrt{t}$ は実数であり，② で $x=y=\sqrt{t}$ として

$$f(t)=\left\{f(\sqrt{t})\right\}^2 \geqq 0$$

となることに注意する．

　実数 x，y が $x \leqq y$ を満たすとき

$$y-x \geqq 0$$

であるから

$$f(y-x) \geqq 0$$

が成り立つ．これと，①，④ より

$$\begin{aligned} f(y-x)&=f(y)+f(-x)\\ &=f(y)-f(x) \end{aligned}$$

であるから

$$f(y)-f(x) \geqq 0 \iff f(x) \leqq f(y)$$

が成り立つ．

(3)　(1) と ④ より正の無理数 x に対して，$f(x)=x$ となることを示せばよい．

　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を以下のように定める．

$a_n=$（x を無限小数で表記した場合の小数第 n 位までの数）

$b_n=$（a_n の小数第 n 位の数字に 1 を加えた数）

すると，a_n，b_n は有限小数であるから，有理数である．作り方から

$$a_n \leqq x \leqq b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$\left(\because\ |x-a_n| \leqq \frac{1}{10^n},\ |x-b_n| \leqq \frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

となる．よって，(1)，(2) より

$$f(a_n) \leqq f(x) \leqq f(b_n)$$

$$\iff \quad a_n \leqq f(x) \leqq b_n$$

がすべての自然数 n で成り立ち，⑤ とはさみうちの原理から

$$f(x) = x$$

が (x が無理数のとき) 成り立つ．これと (1) より，すべての実数 x に対して

$$f(x) = x$$

であることが示された．

□

＜コメント＞

こんにちは．数学科の川﨑です．今年度も，このページで，主に理系に向けた数Ⅲの問題を担当します．１年間よろしくお願いします．

さて，今回，新年度１発目ということでしたが，出来はいかがだったでしょうか？この問題は，2015 年度（最新の入試問題）の大阪大学の挑戦枠の入試問題です．

＜挑戦枠とは…＞

大阪大学理学部の数学科、物理学科、化学科および生物科学科生命理学コースで設けられている特別な入試方式です．

阪大の HP によると

「与えられた知識を吸収することだけに満足せず、自分自身の頭脳でどこまでも粘り強く考察して真理を探究・発信することを熱望する人を受け入れるために前期日程に「挑戦枠」を導入」

とのことです．一般枠とは別に定員が設けられており，専門科目の配点が高くなっています（入試方式や配点等は，必ず最新の入試要項で確認してください）．

というわけで，難易度は高めに設定されています．(3) は，“実数の連続性”と言われるものが背景で，高校生には馴染みがあまりないかもしれません．(1)，(2) を頑張って，(3) にどう使うのかを考えましょう．このような抽象関数の問題では，特別なことはできませんので

「基本や定義に忠実に解いていく」

ことが大切です．

以下，設問毎に補足していきます．

(1)　与えられた２つの関係式 ①，② をどう使うのかを考えます．$f(1)$ の値が分かっていますので，x や y に１を代入してみたり，$x=y$ としてみたりして様子をつかむことが大切です．

実際，① で $y=1$ とすると

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(x)+f(1) \\ &= f(x)+1 \end{aligned}$$

となり，この関数は x が１増えると値が１増えることが分かります．これと (後述する) $f(0)=0$ から

「0 以上の整数 n に対して，$f(n)=n$ となる」 ……(※)

ことは分かりますね．解答ではこれを数学的帰納法で示しました．

$$f(n+1) = f(n)+1$$

を漸化式（等差型）と見て解いてもいいでしょう．

さらに，①，② で $x=y$ とすれば

$$f(2x) = 2f(x) \ \cdots\cdots (*)$$

$$f(x^2) = \{f(x)\}^2 \ \cdots\cdots (**)$$

などが分かりますし，$(*)$ で $x=0$ とすると

$$f(0) = 0$$

が分かります．すると，$f(0)$，$f(1)$ が分かるので，これを利用して

$$f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$$

$$\iff \quad f(-x)=-f(x) \ \cdots\cdots (***)$$

であるとか，$x \fallingdotseq 0$ のとき

$$f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\iff \quad f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=1$$

から，$f(x) \fallingdotseq 0$ ならば

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$$

となることも分かります．すなわち，x に対する和の逆元 $-x$ や，積の逆元 $\dfrac{1}{x}$ での f の値の情報が得られるのです．

ここまでくれば，先ほどの (※) をすべての有理数の話に広げることは容易です．

$f(0)=0$ と $(***)$ から，0 以上の有理数に対して成り立つことを示せば十分で，解答のように 0 以上の有理数を $x=\dfrac{n}{m}$ (m は自然数，n は 0 以上の整数) と表して，② を使って n と m を分けてあげれば示せます．

このような関数方程式の問題では

「値が分かるところはないか」

「逆元の値はどうなっているか」

が取っ掛かりになることもあります．是非覚えておいてください．

(2)　仮定 $x \leqq y$ から，結論 $f(x) \leqq f(y)$ を導きます．結論の不等式は

$$f(y)-f(x) \geqq 0 \quad \iff \quad f(y)+f(-x) \geqq 0$$
$$\iff \quad f(y-x) \geqq 0$$

となりますので（結論から逆算），$y-x$ をかたまりとみて

「$t \geqq 0$ のとき，$f(t) \geqq 0$ が成り立つ」

を示せば良いことが分かります．ここで，役に立つのが先ほどの $(**)$ です．$t \geqq 0$ のとき $t=(\sqrt{t})^2$ と見てあげれば

$$f(t)=\left\{f(\sqrt{t})\right\}^2 \geqq 0$$

となり，示せます．不等式の証明の際，差をとって 0 と比較するのは基本ですが，先ほども述べたように基本に忠実にやることが大切です．

(3)　最後の難関です．今，手にしている武器は (1) と (2)，すなわち

「x が有理数なら $f(x)=x$」

「$f(x)$ は単調増加」

の 2 つです．当然 x が無理数の場合を証明することになります．したがって，無理数 x を有理数で “近似” していくことが必要になります．

最初に述べた “実数の連続性” についてですが，どんな無理数も無限小数で表すことができます．言い換えれば数直線上のどの点をとっても，その点に対する実数がただ 1 つ定まります (穴になっているところは無い！)．このことを解答では証明無しに用いました．「当たり前じゃないか」と思うかもしれないのですが，変な絶対値（数学用語で距離と言います）を有理数に対して定義すると，変な「数直線」を作れたりもします．興味のある人は「p 進距離」というものを調べてみてください．この辺りは，大学の最初の方で「実数とは何か？」を学ぶことになると思いますので，そこで詳しく勉強してください．

解答中の a_n，b_n の決め方を具体的に説明しておきます．例えば $x=\sqrt{2}\,(=1.41421356\cdots\cdots)$ としましょう．これに対して下の表のように a_n，b_n を定めます．

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1.4	1.41	1.414	1.4142	1.41421	1.414213
b_n	1.5	1.42	1.415	1.4143	1.41422	1.414214

作り方から，明らかに $a_n \leqq x \leqq b_n$ で a_n，b_n は有理数です．$x-a_n$ は小数第 n 位まで 0 が並びますので $\dfrac{1}{10^n}$ 未満になり，b_n-x は（少なくとも）小数第 $(n-1)$ 位まで 0 が並びますので $\dfrac{1}{10^{n-1}}$ 未満になります．これより，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ はいずれも x に収束することになります．

これと，$f(x)$ が単調増加であることから

$$f(a_n) \leqq f(x) \leqq f(b_n)$$

$$\iff \quad a_n \leqq f(x) \leqq b_n$$

となり，はさみうちの原理から $f(x)=x$ が無理数 x でも成り立つことが分かります．

$f(x)$ に「連続」という条件がついていれば，こんなことをせずに，上の a_n を使って

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(a_n) \cdots\cdots (\#) \\ &= \lim_{n\to\infty} a_n \\ &= x \end{aligned}$$

((#) に $f(x)$ の連続性を用いています）

とできるのですが，この問題では「連続とは限らない」とわざわざ問題文に明記してありますので，b_n まで作って挟むわけです．

なお，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の取り方は解答のもの以外にも作れますので，自分であれこれ考えてみると良いでしょう．

無理数のいくらでも近くに有理数があることのありがたみを感じることができる問題でした．

では，最後に 1 問，類題を紹介して終わりにします．(5) が難問です．ヒントとして，今度は「周期性」に着目してください．

問

すべての実数で定義された関数 $f(x)$ が

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ f(1)=1$$

を満たすとする．

(1)　$f(0)$ を求めよ．

(2)　自然数 n に対して，$f(n)$ を求めよ．

(3)　整数 n に対して，$f(n)$ を求めよ．

(4)　有理数 r に対して，$f(r)$ を求めよ．

(5)　$0 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x で，$|f(x)|<M$ となる正数 M が存在するとき，すべての実数 x に対して，$f(x)=x$ であることを示せ．

＜解答＞

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \cdots\cdots (*)$$

(1)　$(*)$ で $x=y=0$ として

$$f(0+0)=f(0)+f(0)$$

$$\iff \ f(0)=0$$

である．

(2)　自然数 n に対して

$$\begin{aligned} f(n) &= f((n-1)+1) \\ &= f(n-1)+f(1) \\ &= f(n-1)+1 \end{aligned}$$

が成り立つ．これを繰り返して

$$\begin{aligned} f(n) &= f(1)+(n-1)\cdot 1 \\ &= n \end{aligned}$$

である．

※帰納法で示しても良い．

(3)　$(*)$ で $y=-x$ として

$$f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$$

$$\iff \ f(-x)=-f(x) \quad (\because \ (1))$$

である．これと (2) より，自然数 n に対して

$$\begin{aligned} f(-n) &= -f(n) \\ &= -n \end{aligned}$$

であるから，(1) と合わせて，整数 n に対して

$$f(n)=n$$

である．

(4)　$r=\dfrac{l}{k}$ (k は自然数，l は整数)

とおく．

$$\begin{aligned} f(kr) &= f(r+r+\cdots\cdots+r) \ (r \text{ が } k \text{ 個 }) \\ &= f(r)+f(r)+\cdots\cdots+f(r) \quad (\because \ (*)) \\ &= kf(r) \end{aligned}$$

である．一方，$kr=l$ であるから，(3) より

$$f(kr)=f(l)$$

$$\iff \ kf(r)=l$$

$$\iff \ f(r)=\frac{l}{k}=r$$

である．

(5)　$g(x)=f(x)-x$

とおくと

$$
\begin{aligned}
g(x+y) &= f(x+y)-(x+y) \\
&= \{f(x)-x\}+\{f(y)-y\} \\
&= g(x)+g(y)
\end{aligned}
$$

であり，さらに $g(1)=0$ である．すると

$$g(x+1)=g(x)+g(1)=g(x)$$

であるから，$g(x)$ は周期 1 の周期関数である．

すると，$0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して

$$
\begin{aligned}
|g(x)| &= |f(x)-x| \\
&\leqq |f(x)|+|x| \\
&< M+1
\end{aligned}
$$

が成り立つので，これと $g(x)$ の周期性から，すべての実数 x で

$$|g(x)| < M+1 \quad \cdots\cdots (**)$$

が成り立つ．

ここで，ある実数 a に対して

$$g(a) \fallingdotseq 0$$

と仮定すると，任意の自然数 n に対して

$$g(na)=ng(a)$$

となるので，n を十分大きくとれば

$$|g(na)| > M+1$$

となる．ところが，これは $(**)$ に矛盾する．

よって

$$
\begin{aligned}
& g(x)=0 \\
\iff\ & f(x)=x
\end{aligned}
$$

である．

$\square$

それでは今回はここまでにしたいと思います．また次回．

（数学科　川﨑）