$\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}=\dfrac{9}{11}$ を満たす整数 x，y，z の組をすべて求めよ．

《考え方》

整数問題ですので，まずは解法パターンを確認しておきましょう．

・積の形から絞り込む

・不等式から絞り込む

・余りに注目して絞り込む

という流れが王道でした．今回はどうでしょうか？与式を変形すると以下のようになります．

$$\frac{1}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}=\frac{9}{11}$$
$$\iff \quad x+\frac{1}{y+\dfrac{1}{z}}=\frac{11}{9}$$
$$\iff \quad x+\frac{z}{yz+1}=\frac{11}{9}$$
$$\iff \quad 9x(yz+1)+9z=11(yz+1)$$
$$\iff \quad 9xyz+9x+9z-11yz=11$$

余りに注目してもあまり進みそうにないです．また，ここからキレイな因数分解，つまり

（変数の積）＝（定数）

の形を目指すのは無理そうですね．少し期待度を下げて積を作り

$$9(xyz+x+z)=11(yz+1)$$

から，整数 k を用いて

$$xyz+x+z=11k$$
$$yz+1=9k$$

とおいても，上手くいきそうにないです．

あるいは

$$9x(yz+1)+z(9-11y)=11$$
$$9(xyz+x+z)-11yz=11$$

などとしても進まないです．

なお，積の形から絞り込む場合，往々にして，3 変数のときは苦しいです．

$$xyz-xy-yz-zx+x+y+z=0$$
$$\iff \quad (x-1)(y-1)(z-1)=-1$$

のような因数分解ができるのはかなりレアで，大体の場合は

ある変数がとりうる値を限定する

ことを目指します．例えば

$$1\leqq x\leqq 3$$

のような不等式ができた場合，$x=1$，2，3 の 3 択であり，それぞれの場合について代入して考えれば

単なる 2 変数の不定方程式

となり，どうとでもなります．2 変数と 3 変数以上では難易度が雲泥の差であることは意識しておきましょう．なお，今回は「自然数」ではなく「整数」なので，上から押さえるだけでは不十分であることにも注意してください．

では，具体的にどのように絞るか．

今回は x，y，z の対称式ではないので，よくある

$x\leqq y\leqq z$ と大小順をつけて，

全ての文字を x（または z）でおきかえる

ことにより絞り込みは使えません．とは言え，どれか 1 変数についての絞り込みはできるはず・・そういう目で式をジッと見てやってください．

$$x+\frac{1}{y+\dfrac{1}{z}}=\frac{11}{9}$$

について，分数の成り立ちが x，y，z の順になっているので，絞り込めるとしたら x または z でしょう．そして，x が絞り込めるとしたら，その拠り所は $\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}$ のとりうる値の範囲が限定的ということになります．つまり，$\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}$ が自由に動けなければ，等式が成り立つ以上，x もあまり自由に動けない，という流れです．

実際，そういう目で$\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}$を見てみましょう．

$\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}$の絶対値があまり大きい値をとれなければ，$x$の値は限定的となります．これは結局，$y+\dfrac{1}{z}$の絶対値がある値よりも小さくなれなければ良いわけです．

$y+\dfrac{1}{z}$という式について考えていきましょう．この式はザックリと言って

（整数値）+（-1から1までの数）

という式で，$\dfrac{1}{z}$は帳尻合わせの数です．

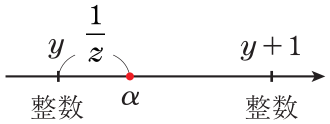
例えば，$\dfrac{31}{3}$という数について

$$\frac{31}{3}=10+\frac{1}{3}$$

と表せますが，これは$y=10$, $z=3$という状況です．$\dfrac{31}{3}$に近い整数値をyとして用意して，端数を$\dfrac{1}{z}$で揃えます．なお，y, zは自然数とは限らないので

$$\frac{31}{3}=11-\frac{2}{3}$$

という表し方もできますが，これは分子が1ではないので，zを上手くとることができませんが，いずれにせよ，ある数αに対して，整数yで近づいておき，$\dfrac{1}{z}$で帳尻を合わせるというわけです（下図のようなイメージ）．

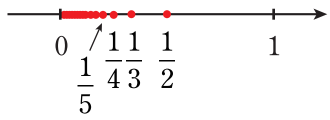


ここで，注意することは，$\dfrac{1}{z}$のとりうる値が限定的ということです．

正の範囲に限定して$z=1, 2, 3, \cdots\cdots$と列挙していくと

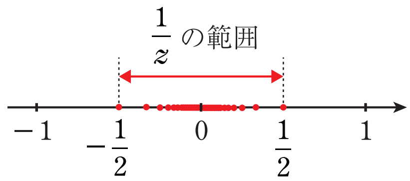
$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \cdots\cdots$$

となり，数直線に表せば下のようになります．

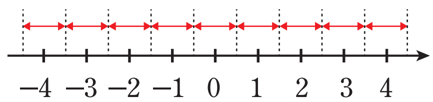


ここで，図から分かるように，0の近くはビッチリと詰まっていて，逆に$\dfrac{1}{2}$と1の間は隙間があることに注意してください．

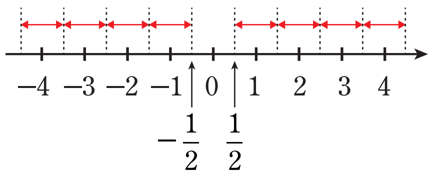
さらに，zが負の値のときも考えると，左右対称になることから$\dfrac{1}{z}$の範囲は次のようになります．



いま，yは整数値をとるので，$\dfrac{1}{z}$を用いて各整数から左右に$\dfrac{1}{2}$ずつ触手を伸ばすことを考えると，範囲について一通りは網羅できそうです（あくまで射程圏内というだけの話であり，全ての値がくまなく取れるわけではないです）．



これでは絞れないな，と思うところですが，$y+\dfrac{1}{z}$の絶対値の下限値についてもう少し突き詰めていくと，実は$y=0$はとりえないことが簡単に分かる（後の解答参照）ので，実際は次のようになります．



これより

$$\left|y+\frac{1}{z}\right| \geqq \frac{1}{2}$$

が成り立ち，このことから

$$0<\left|\frac{1}{y+\frac{1}{z}}\right| \leqq 2$$

が言えるので，x の範囲が絞り込めます．

では，以下，模範解答です．

《解答》

与式より，$z \fallingdotseq 0$ および $y+\frac{1}{z} \fallingdotseq 0$ である．また，与式において逆数をとると

$$x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{11}{9} \quad \cdots\cdots ①$$

となる．ここで，$y=0$ とすると

$$x+\frac{1}{\frac{1}{z}}=\frac{11}{9} \iff x+z=\frac{11}{9}$$

となり，x，z は整数であるから，これは不適．よって，以下

$$y \fallingdotseq 0 \text{ かつ } z \fallingdotseq 0 \text{ かつ } y+\frac{1}{z} \fallingdotseq 0 \quad \cdots\cdots ②$$

の範囲で考える．

いま，② において

$$\left|y+\frac{1}{z}\right| \geqq \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示す．

・$z=\pm 1$ のとき

$$|y \pm 1| \geqq \frac{1}{2}$$

を示せばよく，左辺は 0 ではない 0 以上の整数より，1 以上であるから成り立つ（等号は成立しない）．

・$z \fallingdotseq \pm 1$ のとき

一般に

$$|A|+|B| \geqq |A+B|$$

（等号成立は A と B が同符号のとき）

が成り立つので

$$\left|y+\frac{1}{z}\right|+\left|-\frac{1}{z}\right| \geqq \left|\left(y+\frac{1}{z}\right)+\left(-\frac{1}{z}\right)\right|$$

$$\iff \left|y+\frac{1}{z}\right|+\left|\frac{1}{z}\right| \geqq |y|$$

$$\iff \left|y+\frac{1}{z}\right| \geqq |y|-\left|\frac{1}{z}\right| \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．等号成立は，「$y+\frac{1}{z}$ と $-\frac{1}{z}$ が同符号」のときである．さらに

$$|y| \geqq 1$$

かつ

$$\left|\frac{1}{z}\right| \leqq \frac{1}{2} \iff -\left|\frac{1}{z}\right| \geqq -\frac{1}{2}$$

が成り立つので，それぞれ辺々足して

$$|y|-\left|\frac{1}{z}\right| \geqq \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ．等号成立は $|y|=1$ かつ $|z|=2$ のときである．

よって ③，④ より

$$\left|y+\frac{1}{z}\right| \geqq \frac{1}{2}$$

が成り立つ．等号成立は

「$y+\frac{1}{z}$ と $-\frac{1}{z}$ が同符号」

かつ　$|y|=1$　かつ $|z|=2$

より

$(y,\ z)=(1,\ -2)$，$(-1,\ 2)$

のときである．

したがって

$$① \iff \frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{11}{9}-x$$

より

$$\left|y+\frac{1}{z}\right| \geqq \frac{1}{2} \iff 0<\left|\frac{1}{y+\frac{1}{z}}\right| \leqq 2$$

に代入して

$$\begin{aligned} &0<\left|\frac{11}{9}-x\right| \leqq 2 \\ &\iff -2 \leqq \frac{11}{9}-x \leqq 2,\quad x \fallingdotseq \frac{11}{9} \\ &\iff -\frac{7}{9} \leqq x \leqq \frac{29}{9},\quad x \fallingdotseq \frac{11}{9} \end{aligned}$$

が成り立つ．x は整数より

$x=0$，1，2，3

に限られる．以下

$$0<\left|\frac{1}{z}\right| \leqq 1 \quad \cdots\cdots ⑤$$

に注意する．

(i) $x=0$ のとき

$$\begin{aligned} ① &\iff \frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{11}{9} \\ &\iff y+\frac{1}{z}=\frac{9}{11} \\ &\iff \frac{1}{z}=\frac{9}{11}-y \end{aligned}$$

より，⑤ に代入すると

$$\begin{aligned} &0<\left|\frac{9}{11}-y\right| \leqq 1 \\ &\iff -1 \leqq \frac{9}{11}-y \leqq 1,\quad y \fallingdotseq \frac{9}{11} \\ &\iff -\frac{2}{11} \leqq y \leqq \frac{20}{11},\quad y \fallingdotseq \frac{9}{11} \end{aligned}$$

となる．よって，$y \fallingdotseq 0$ より $y=1$ に限られるが，

このとき，$z=\frac{11}{9}$ となるので不適．

(ii) $x=1$ のとき

$$\begin{aligned} ① &\iff 1+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{11}{9} \\ &\iff \frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{2}{9} \\ &\iff y+\frac{1}{z}=\frac{9}{2} \\ &\iff \frac{1}{z}=\frac{9}{2}-y \end{aligned}$$

より，⑤ に代入すると

$$\begin{aligned} &0<\left|\frac{9}{2}-y\right| \leqq 1 \\ &\iff -1 \leqq \frac{9}{2}-y \leqq 1,\quad y \fallingdotseq \frac{9}{2} \\ &\iff \frac{7}{2} \leqq y \leqq \frac{11}{2},\quad y \fallingdotseq \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる．よって $y=4$，5 に限られ

$y=4$ のとき　$z=2$

$y=5$ のとき　$z=-2$

となり，これらは適する．

(iii) $x=2$ のとき

$$\begin{aligned} ① &\iff 2+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{11}{9} \\ &\iff \frac{1}{y+\frac{1}{z}}=-\frac{7}{9} \\ &\iff y+\frac{1}{z}=-\frac{9}{7} \\ &\iff \frac{1}{z}=-\frac{9}{7}-y \end{aligned}$$

より，⑤ に代入すると

$$\begin{aligned} &0<\left|-\frac{9}{7}-y\right| \leqq 1 \\ &\iff -1 \leqq -\frac{9}{7}-y \leqq 1,\quad y \fallingdotseq -\frac{9}{7} \\ &\iff -\frac{16}{7} \leqq y \leqq \frac{2}{7},\quad y \fallingdotseq -\frac{9}{7} \end{aligned}$$

となる．よって，$y \fallingdotseq 0$ より $y=-1$ に限られるが，

このとき，$z=-\frac{7}{2}$ となるので不適．

(iv)　$x=3$ のとき

$$
\text{①} \iff 3+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{11}{9}
$$

$$
\iff \frac{1}{y+\frac{1}{z}}=-\frac{16}{9}
$$

$$
\iff y+\frac{1}{z}=-\frac{9}{16}
$$

$$
\iff \frac{1}{z}=-\frac{9}{16}-y
$$

より，⑤ に代入すると

$$
0<\left|-\frac{9}{16}-y\right|\leqq 1
$$

$$
\iff -1\leqq -\frac{9}{16}-y\leqq 1,\quad y\fallingdotseq -\frac{9}{16}
$$

$$
\iff -\frac{25}{16}\leqq y\leqq -\frac{7}{16},\quad y\fallingdotseq -\frac{9}{16}
$$

となる．よって $y=-1$ に限られ

$$
y=-1 \text{ のとき}\quad z=\frac{16}{7}
$$

となり．いずれも不適．

以上より

$$
(x,\ y,\ z)=(1,\ 4,\ 2),\ (1,\ 5,\ -2)
$$

である．

（解答終わり）

《補足 1》

3 変数のままでは大変ですが，x の値を決め，y，z の 2 変数にした後は，解答のように何とでもなりますね．なお，2 変数にした後，例えば $x=0$ のときについて

$$
y+\frac{1}{z}=\frac{9}{11}
$$

$$
\iff 11yz+11=9z
$$

$$
\iff z(11y-9)=-11
$$

とできるので，この積の形から

$$
(z,\ 11y-9)=(1,\ -11),\ (-1,\ 11)
$$

$$
(11,\ -1),\ (-11,\ 1)
$$

と絞り込むこともできます．

《補足 2》

$$
\left|y+\frac{1}{z}\right|\geqq\frac{1}{2}
$$

を示すところで，解答では「三角不等式」を用いています．ただ，左辺は 0 とは異なるため，

$(y,\ z)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$ を除外するために，少し面倒ですが場合分けをしています．

なお，「三角不等式」は用いず

$y\geqq 2$ のとき

$y\leqq -2$ のとき

$y=\pm 1$ のとき

のように分けて，もう少し具体的に考えて示すことも可能です．

また，等号成立について

$(y,\ z)=(1,\ -2),\ (-1,\ 2)$ のとき

と調べていますが，実際は不要です．x の不等式に書き換えた後の

$$
-\frac{7}{9}\leqq x\leqq\frac{29}{9}
$$

の等号が成り立つときの話であり，この場合は x が整数でないため無関係ですよね．

さらに

$$
0<\left|\frac{1}{y+\frac{1}{z}}\right| \iff 0<\left|\frac{11}{9}-x\right|
$$

から $x\fallingdotseq\frac{11}{9}$ としているところや，x の値を決めた上で y の値を絞り込む際に

$$
0<\left|\frac{1}{z}\right|
$$

から，$y\fallingdotseq$●としているところも不要です．

結果的には

$$
\left|\frac{1}{y+\frac{1}{z}}\right|\leqq 2,\quad \left|\frac{1}{z}\right|\leqq 1
$$

という不等式で十分で，「0 より大きい」を踏まえる必要はありません．

《補足 3》

この問題の背景は分かるでしょうか？知ってる人が見たら一発で分かる代物ですが，「連分数展開」というものがテーマです．「連分数」とは，分母にさらに分数が含まれているような分数のことを指します．

今回の $\dfrac{11}{9}$ について見てみましょう．これについて，整数部分と小数部分とに分けると

$$\frac{11}{9}=1+\frac{2}{9}$$

となります．ここで出てきた $\dfrac{2}{9}$ は 0 と 1 の間の数なので，これを整数部分と小数部分に分けたところで何も変わりません．一方で，この数について逆数をとると当然 1 より大きい数となり，整数部分と小数部分とに分けることができます．実際やってみると

$$\frac{11}{9}=1+\frac{2}{9}=1+\frac{1}{\left(\frac{9}{2}\right)}$$
$$=1+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}$$

となります．

この結果から，$(x,\ y,\ z)=(1,\ 4,\ 2)$ が解の 1 つであることは分かります．なお，ここで連分数展開は打ち止めです．新しく出てきた分数が $\dfrac{1}{2}$ と，分子が 1 なので，これの逆数をとったところで以降進みません．

もう少し続く，他の例も見てみましょう．

$$\frac{14}{9}=1+\frac{5}{9}=1+\frac{1}{\left(\frac{9}{5}\right)}$$
$$=1+\frac{1}{1+\frac{4}{5}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)}}$$
$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$$

などがあります．

なお，ある 1 より大きい数に対して「整数部分」と「小数部分」に分けているので，扱う数としては必然的に全て正の数になります．アルゴリズムを考えれば，正の数（自然数）のみを用いるこの表記として

表現は一意的

であることが分かります．また，ここでやっている作業は，実は

ユークリッドの互除法

と密接に関わりがあります．

$14\div 9=1\cdots$ 余り 5

$9\div 5=1\cdots$ 余り 4

$5\div 4=1\cdots$ 余り 1

に対して

$$\frac{14}{9}=1+\frac{5}{9}=1+\frac{1}{\left(\frac{9}{5}\right)}$$
$$=1+\frac{1}{1+\frac{4}{5}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)}}$$
$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$$

と対応していることが確認できます．

さらに，上で「一意的な表現」と書きましたが，今回の問題のように負の数も *OK* とするならば，例えば

$$\frac{14}{9}=2-\frac{4}{9}$$
$$=2-\frac{1}{\left(\frac{9}{4}\right)}$$
$$=2-\frac{1}{2+\frac{1}{4}}$$

のようにもできますし，途中まで同じ，途中から路線変更するとして

$$
\begin{aligned}
\frac{14}{9} &= 2-\frac{4}{9} = 2-\frac{1}{\left(\frac{9}{4}\right)} \\
&= 2-\cfrac{1}{3-\cfrac{3}{4}} = 2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)}} \\
&= 2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}
\end{aligned}
$$

のようにもできます．

基本的には，ある数に対して（整数）と（絶対値が 1 未満の数）とに分ける方法は，後者を正とするか負とするかで 2 通りあるので，負の数を許すならば枝分かれ的に表現方法は増えていきます．

また，（絶対値が 1 未満の数）の逆数をとると分子は当然 1 になりますが，その分子を敢えて 1 以外にする表記もあります．

$$
\begin{aligned}
\frac{14}{9} &= 1+\frac{5}{9} = 1+\frac{1}{\left(\frac{9}{5}\right)} = 1+\frac{2}{\left(\frac{18}{5}\right)} \\
&= 1+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{5}} = 1+\cfrac{2}{3+\cfrac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)}} \\
&= 1+\cfrac{2}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}} = 1+\cfrac{2}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)}}} \\
&= 1+\cfrac{2}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}
\end{aligned}
$$

このような表記は分子は何でも良いので，無数に表し方は存在します．

これと区別して，分子が全て 1 になるような表記を「<u>正則</u>連分数（展開）」とも言います．正則連分数展開は，各数に対して一意的な表現となります．

わざわざ正則連分数展開でない表記を用いる必要はあるのか？とデメリットしか感じないかもしれませんが，敢えてそうすることにより，数字の並びに規則性を見出すことができるケースもあります．例えば，有名な無理数 π について

$$
\pi = 3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{9^2}{6+\cfrac{11^2}{6+\cfrac{13^2}{\cdots}}}}}}}
$$

と表せることが知られています（証明は大学数学が必要です）．

無理数の分数表記というあたりに違和感を感じることかと思いますが，シンプルな無理数であれば，簡単にできます．例えば$\sqrt{2}$ について

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}-1} &= \frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} \\
&= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} \\
&= \sqrt{2}+1
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\quad \sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}
$$

であることに注意すると

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1+\left(\sqrt{2}-1\right) \\
&= 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1} \\
&= 1+\cfrac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)} \\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}} \\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}} \\
&= \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

とできます．

$\sqrt{2}$ の整数部分が 1 であることを知っていることが前提ですが

$$\sqrt{2}=1+\left(\sqrt{2}-1\right)$$

と分けた後に，小数部分である $\sqrt{2}-1$ について<u>逆数をとり，その後，有理化をする</u>ところがミソですね．（π については，逆数をとった後に有理化ができないので，同じ手法では上手くできません．）

また，一番美しいと思われるものとしては，黄金比 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ の（正則）連分数展開です．

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}\right)}=\frac{1}{\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}}$$
$$=\frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}$$

であることに注意すると

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1+\frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}$$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+\frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}\ \cdots\cdots①$$

が成り立ちます．① を繰り返し用いると

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$
$$=1+\frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}$$
$$=1+\frac{1}{1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}}$$
$$=1+\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}}}$$
$$=\cdots\cdots$$

となります．

《補足 4》

少し話は逸れますが，π の分数近似について．

知る人ぞ知る，という感じですが，π は $\dfrac{22}{7}$ や $\dfrac{355}{113}$ というシンプルな分数でかなりの精度で近似できます．

$$\pi=3.14159265\cdots\cdots$$
$$\frac{22}{7}=3.14285714\cdots\cdots$$
$$\frac{355}{113}=3.14159292\cdots\cdots$$

なので，実感できると思います．ちなみに，「シンプルな分数」と書いたのは，「分母が小さい」という意味です．

$$\pi=3.14159265\cdots\cdots$$
$$\fallingdotseq\frac{314159265}{100000000}$$

としたところで，何の魅力も感じないですよね？同じく $\dfrac{314}{100}\left(=\dfrac{157}{50}\right)$ も芸が無いです．その点，一桁の分母で近似できている $\dfrac{22}{7}$ は凄いですし，3 桁の分母とは言え，$\dfrac{355}{113}$ は小数第 6 位まで同じという脅威の近似です．

では，このような分数はどのように見つけることができるのか？実は，今回の連分数展開と同じような考え方が根底にあります．

$$\pi=3.14159265\cdots\cdots$$

というのが分かっている前提で進めると

$$\pi\fallingdotseq3.14159265$$
$$=3+0.14159265$$
$$=3+\frac{1}{\left(\dfrac{1}{0.14159265}\right)}$$
$$=3+\frac{1}{7.06251348\cdots\cdots}$$
$$\fallingdotseq3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$$

であり，もっと近似の精度を上げると

$$
\begin{aligned}
\pi &\fallingdotseq 3+\frac{1}{7.06251348}\\
&=3+\frac{1}{7+0.06251348}\\
&=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{\left(\cfrac{1}{0.06251348}\right)}}\\
&=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15.9965499\ \cdots\cdots}}\\
&\fallingdotseq 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16}}=3+\frac{16}{113}=\frac{355}{113}
\end{aligned}
$$

となります．電卓必須ではありますが，上手くいってますよね？

もちろん，近似の精度を上げたければ，分母に生じた小数を整数に近似するタイミングを遅らせ，さらに連分数展開を続ければ良いわけです．

ただし，分母に登場する数が 7.06251348 …… や 15.9965499 …… のような整数に近い数のタイミングで近似しないと，近似の精度は下がりますのでご注意ください．

《最後に》

いかがだったでしょうか？知れば知るほど魅力を感じる連分数展開です．書き残したこともまだまだ数多くありますので，興味がある方は，「連分数展開」で色々と調べてみてください．

折角ですので，「連分数展開」がテーマになっている今回とは毛色の違う問題を，次回も出題しようかと思います．楽しみにお待ちください．

それでは，また次回．

（研伸館　野口）