強者の戦略

数学科の西村です．今回の問題はいかがだったでしょうか．(1) の証明が難しく感じた人が多いのではないでしょうか．ここでは本問のテーマである漸化式を元にした論証方法について解説していきます．

まずは，問題の確認です．

問

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=a_2=1$ かつ漸化式

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすものとする．

自然数 n に対して，実数 θ_n を $0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\tan\theta_n=\dfrac{1}{a_n}$ となるように定める．

(1)　$a_n(a_{n+2}+a_{n+1})=a_{n+1}a_{n+2}-(-1)^n \ (n=1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

(2)　$\theta_{2k+1}+\theta_{2k+2}=\theta_{2k} \ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

(1)

まず，元の漸化式を用いて示したい式の両辺を変形してみます．左辺は，a_{n+2} を消去して $a_n(2a_{n+1}+a_n)$ とか $a_{n+2}+a_{n+1}=a_{n+3}$ を代入して a_na_{n+3} などと変形できます．また右辺は a_{n+2} を消去すると，$a_n(a_n+a_{n+1})-(-1)^n$ と変形できますが，これだけで一致することを示すのは無理ですね．数列 $\{a_n\}$ を含む項が両辺ともにあると示すことが困難ですから，示したい式を $a_n(a_{n+2}+a_{n+1})-a_{n+1}a_{n+2}=-(-1)^n$ と変形しましょう．

ここで $b_n=a_n(a_{n+2}+a_{n+1})-a_{n+1}a_{n+2}$ で定義される数列 $\{b_n\}$ を考えると，$b_n=-(-1)^n$ を示す問題ということになります．ではこれはどうすれば示せるでしょうか．その答えは新たに考えた数列の漸化式の作成です．結果から逆算して作るべき漸化式を考えましょう．では解答です．

〈解答〉

$b_n=a_n(a_{n+2}+a_{n+1})-a_{n+1}a_{n+2}$ とおく．

まず，$b_{n+1}=-b_n$ となることを示す．

$$\begin{aligned}
b_{n+1}&=a_{n+1}(a_{n+3}+a_{n+2})-a_{n+2}a_{n+3}\\
&=a_{n+1}(2a_{n+2}+a_{n+1})-a_{n+2}(a_{n+2}+a_{n+1})\\
&=a_{n+1}a_{n+2}+{a_{n+1}}^2-{a_{n+2}}^2\\
&=a_{n+1}a_{n+2}+(a_{n+1}+a_{n+2})(a_{n+1}-a_{n+2})\\
&=a_{n+1}a_{n+2}-a_n(a_{n+1}+a_{n+2})\\
&=-b_n
\end{aligned}$$

である．よって $b_{n+1}=-b_n$ が示せた．

また $b_1=1$ であるから，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 -1 の等比数列である．よって

$$\begin{aligned}
&b_n=(-1)^{n-1}\\
\iff& a_n(a_{n+2}+a_{n+1})-a_{n+1}a_{n+2}=-(-1)^n\\
\iff& a_n(a_{n+2}+a_{n+1})=a_{n+1}a_{n+2}-(-1)^n \quad ■
\end{aligned}$$

〈補足〉

$b_{n+1}=-b_n$ を導く過程では，b_{n+1} からスタートし，そこから b_n を生み出すために与えられた漸化式を用いて，添字番号を下げていっています．

また，数学的帰納法での証明も可能です．そのままでは少し示しにくいので，与えられた漸化式を代入して，示すべき式を変形しておくとよいでしょう．

〈別解①〉

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ より，示すべき式は

$$\begin{aligned}
&a_n(a_{n+2}+a_{n+1})=a_{n+1}a_{n+2}-(-1)^n\\
\iff& a_n(2a_{n+1}+a_n)=a_{n+1}(a_{n+1}+a_n)-(-1)^n\\
\iff& a_na_{n+1}+{a_n}^2-{a_{n+1}}^2=-(-1)^n \cdots (*)
\end{aligned}$$

と変形できる．これを数学的帰納法により示す．

i)　$n=1$ のとき

$(\text{左辺})=a_1a_2+{a_1}^2-{a_2}^2=1,\ (\text{右辺})=-(-1)^1=1$

より，$(*)$ は成り立つ．

ii)　$n=k$ (k は自然数) のとき $(*)$ の成立を仮定すると，

$$a_ka_{k+1}+{a_k}^2-{a_{k+1}}^2=-(-1)^k \cdots ①$$

となる．このとき，

$$\begin{aligned}
&a_{k+1}a_{k+2}+{a_{k+1}}^2-{a_{k+2}}^2\\
&=a_{k+1}(a_{k+1}+a_k)+{a_{k+1}}^2-(a_{k+1}+a_k)^2\\
&\qquad\qquad (\because\ a_{k+2}=a_{k+1}+a_k)\\
&=-(a_ka_{k+1}-{a_{k+1}}^2+{a_k}^2)\\
&=(-1)^k \quad (\because ①)\\
&=-(-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

以上 i)，ii) よりすべての自然数 n について $(*)$ が成り立ち，題意が示せた．　■

2つの解法に関して，論証方法は異なりますが，実質的には同じことをやっています．数学的帰納法においても数列 $\{b_n\}$ の隣接2項間の関係を作りにいっていることが見てとれるでしょう．どちらを選択するかは問題に応じて変わります．しかしいずれの手法をとるにしても大切なことは，第 n 項を用いて第 $(n+1)$ 項を表す（場合によっては第 n，$(n+1)$ 項を用いて第 $(n+2)$ 項を表す）ことであり，その後は臨機応変な対応が必要となります．

ちなみに普通の隣接3項間漸化式は一般項の導出方法が確立されている漸化式なので，一般項を求めて，示したい式に代入しても示せます．

〈別解②〉

（一般項の導出部分は省略）

$$a_n=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}\left(\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\text{より}$$

$$\begin{aligned}
&a_n(a_{n+2}+a_{n+1})-a_{n+1}a_{n+2}\\
&=a_na_{n+3}-a_{n+1}a_{n+2}\quad(\because\ a_{n+2}+a_{n+1}=a_{n+3})\\
&=\frac{(\beta^n-\alpha^n)(\beta^{n+3}-\alpha^{n+3})-(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1})(\beta^{n+2}-\alpha^{n+2})}{(\beta-\alpha)^2}\\
&=\frac{-\alpha^n\beta^{n+3}-\alpha^{n+3}\beta^n+\alpha^{n+2}\beta^{n+1}+\alpha^{n+1}\beta^{n+2}}{(\beta-\alpha)^2}\\
&=\frac{(\alpha\beta)^n(-\beta^3-\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)}{(\beta-\alpha)^2}\\
&=-\frac{(\alpha\beta)^n\left\{\alpha^2(\alpha-\beta)-\beta^2(\alpha-\beta)\right\}}{(\beta-\alpha)^2}\\
&=-\frac{(\alpha\beta)^n(\alpha-\beta)(\alpha^2-\beta^2)}{(\beta-\alpha)^2}\\
&=-\frac{(\alpha\beta)^n(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)^2}\\
&=-(\alpha\beta)^n(\alpha+\beta)\\
&=-(-1)^n\quad(\because\ \alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1)
\end{aligned}$$

よって題意が示せた．■

1つの数列を表す漸化式は1通りではなく，今回のように複数存在します．特に本問で扱われているフィボナッチ数列は多数の面白い性質をもった数列ですので，入試問題でもたびたび取り上げられます．その性質を知り，覚える必要はありませんが，大切なことはその行き来を論じれるようになることです．思考としては，まず与えられた漸化式を用いて式変形し，示せないかを試みます．それだけで示すことが無理なら

・数列を置き換え，新たな漸化式を作成

・数学的帰納法

で考えていきましょう．

また，本問は一般項を求めることができましたから，それを代入して証明するという方針が使えました．しかし，その後の計算が重たいため，あまり良い解法とは言えません．今回は最終手段くらいで考えたほうが良いでしょう．

(2)

元の漸化式に $a_n=\dfrac{1}{\tan\theta_n}$ を代入しても目標の式が得られないので，(1) を利用しましょう．入試問題では前の問いが後の問いのヒントというパターンが多いですので，この発想は大切です．

(1) で $n=2k$ としたものと $a_n=\dfrac{1}{\tan\theta_n}$ から

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tan\theta_{2k}}\left(\frac{1}{\tan\theta_{2k+2}}+\frac{1}{\tan\theta_{2k+1}}\right)\\
&=\frac{1}{\tan\theta_{2k+1}}\cdot\frac{1}{\tan\theta_{2k+2}}-1\ \cdots①
\end{aligned}$$

とでき，ここから $\theta_{2k+1}+\theta_{2k+2}=\theta_{2k}$ を目指します．しかし，式変形の方針が立てにくいですね．こういう場合には，示したい式から逆算を考えましょう．θ_n の範囲に注意すると，（詳しくは解答で触れる）

$$\theta_{2k+1}+\theta_{2k+2}=\theta_{2k}\Longleftrightarrow\tan(\theta_{2k+1}+\theta_{2k+2})=\tan\theta_{2k}\ \cdots②$$

と変形できます．①から②を目指すにはどうすればよいでしょうか．恐らく加法定理であろうと想像できると思います．あとはその間を埋めていきましょう．では解答です．

〈解答〉

数列 $\{a_n\}$ は単調増加数列であるから，$a_1=1$，$a_2=1$，$a_n\geqq a_3=2\ (n\geqq3)$ である．よって，$\tan\theta_1=\tan\theta_2=1$ となり，$\theta_1=\theta_2=\dfrac{\pi}{4}$ である．また，$n\geqq3$ のとき，

$\tan\theta_n=\dfrac{1}{a_n}\leqq\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{1}{2}<1$ であるから，$\tan\theta_n>0$ と合わせると，$0<\theta_n<\dfrac{\pi}{4}\ (n\geqq3)$ となる．

$\tan\theta_n\neq0$ であるから $a_n=\dfrac{1}{\tan\theta_n}\left(0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とでき，これと (1) より，

$$a_{2k}(a_{2k+2}+a_{2k+1})=a_{2k+1}a_{2k+2}-(-1)^{2k}$$

$$\iff \frac{1}{\tan\theta_{2k}}\left(\frac{1}{\tan\theta_{2k+2}}+\frac{1}{\tan\theta_{2k+1}}\right)=\frac{1}{\tan\theta_{2k+1}}\cdot\frac{1}{\tan\theta_{2k+2}}-1$$

$$\iff \frac{\tan\theta_{2k+1}+\tan\theta_{2k+2}}{\tan\theta_{2k}}=1-\tan\theta_{2k+1}\tan\theta_{2k+2}$$

$$\iff \frac{\tan\theta_{2k+1}+\tan\theta_{2k+2}}{1-\tan\theta_{2k+1}\tan\theta_{2k+2}}=\tan\theta_{2k}$$

$$(\because \tan\theta_{2k+1}\tan\theta_{2k+2}<1)$$

$$\iff \tan(\theta_{2k+2}+\theta_{2k+1})=\tan\theta_{2k} \ \cdots\ (*)$$

ここで，$\theta_1=\theta_2=\dfrac{\pi}{4}$，$0<\theta_n<\dfrac{\pi}{4}$ $(n\geqq 3)$ であることから，$0<\theta_{2k+2}+\theta_{2k+1}<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\theta_{2k}\leqq\dfrac{\pi}{4}$ となる．

よって，$(*)$ より $\theta_{2k+2}+\theta_{2k+1}=\theta_{2k}$ である．■

〈終わりに〉

今回の問題は【2013 京都府立医科大学】からの抜粋でした．元の問題にはこの後に，

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\theta_{2k-1}$ を求めよ．

という問いが付いていました．数学Ⅲの内容ですので，理系の方は挑戦してみてください．

また今回取り上げたテーマと似た内容の問題が【2015 東京大学（理科）】で出題されています．

> 数列 $\{p_n\}$ を次のように定める．
>
> $$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
>
> (1)　$\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ．
>
> (2)　すべての $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ．
>
> (3)　数列 $\{q_n\}$ を次のように定める．
>
> $$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
>
> すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ を示せ．

今回のものを参考にして，是非挑戦してみてください．

もうすぐ暑く長い夏が始まります．現役生にとっては1年で最も成長できる期間になりますので，思考を巡らして学力向上に励み，最高の夏にしましょう．

（西村）