強者の戦略

今回の問題は【2003 お茶の水女子大学】の入試問題を改題して出題しました．(1) は誘導を削除しており，(2) は実際の問題から変更しています．

それでは，まず問題の確認です．

> 問題
>
> n を自然数とする．n 円の商品一個の買い物に対して消費税が次のように定まるものとする．
>
> 消費税＝（$n \times 0.05$ の小数部分を切り捨てた整数）円
>
> また，この商品を買ったときの税込みの支払い総額 T 円は
>
> T 円＝ n 円＋消費税
>
> となる．どのような自然数 n に対しても n 円の商品が存在するものとして，次の各問いに答えよ．
>
> (1)　T として決して現れない自然数をすべて求めよ．
>
> (2)　m を任意の自然数とする．
>
> $T=777\cdots\cdots77$（7 が m 桁続く）
>
> となるような自然数 n は存在するか．存在するか存在しないかを答えた上で，その理由を述べよ．

［(1) 考察］

普段，解いたことがないような問題のため，とっかかりが見つけにくかったかもしれませんが

初めて見る問題は，まずは実験

から始めましょう．特に，整数，場合の数・確率，数列の単元では威力を発揮します．

実際に，n を 1 から順に大きくしていきながら，T をそれぞれ求めてみましょう．消費税を s とおくと

$n=1$ のとき　$s=0$ より $T=1$
$n=2$ のとき　$s=0$ より $T=2$
⋮
$n=19$ のとき　$s=0$ より $T=19$
$n=20$ のとき　$s=1$ より $T=21$

となり，n が 19 から 20 になったとき，n を 0.05 倍したときの整数部分が 0 から 1 に変わり，消費税が変化します．さらに，続けて見ていくと

$n=21$ のとき　$s=1$ より $T=22$
$n=22$ のとき　$s=1$ より $T=23$
⋮
$n=39$ のとき　$s=1$ より $T=40$
$n=40$ のとき　$s=2$ より $T=42$
⋮
$n=59$ のとき　$s=2$ より $T=61$
$n=60$ のとき　$s=3$ より $T=63$
⋮

となるので，n が 20 の倍数になるたびに消費税の値が変化し，そのときに T が 1 つ小さな n のときとは連続しない自然数になることがわかりました．これは，問題で与えられた消費税の定義

（$n \times 0.05$ の小数部分を切り捨てた整数）円

より

「n を 20 で割ったときの整数部分が消費税」…($*$)

であることが理由です．

さらに，60 以下の n に対して T として現れない自然数を見てみると

20，41，62

であることもわかります．強者たらんとしている皆さんであれば，この 3 数に対する共通点が

「21 で割ったときに 20 余る自然数」…($**$)

であることに，気づけるのではないでしょうか．

以上の考察から

整数問題は

1．不等式を探す

2．積の形を作り，約数・倍数に注目

3．自然数 l で割った余りで場合分け

のいずれかで候補を絞り込む！

という解法ポイントのうち，3 番をメインに使うのだろうと想定できます．おそらく (1) の答えは ($**$) になると予想されますが，これを ($*$) を踏まえて一般的に証明することができないでしょうか？

ここで少し見方を変えて，T として現れる自然数

に注目すると

「21で割ったときに0以上19以下余る自然数」

となります．つまり, 実際に現れるTを21で割ると, 21で割っているのに20で割ったときの余りしか登場しない，ということです．

これで(*)との間に「20で割ったとき」という共通点を見つけることができましたので，ここに注目して解答を作成します．

[解答]

(1)　自然数nに対し，消費税は

$$n \times 0.05 = \frac{n}{20}$$

の整数部分であり，これはnを20で割ったときの商に等しい．nを20で割ったときの商をj，余りをkとおくと

$$n = 20j + k$$

(ただし，j，kは$j \geqq 0$かつ$0 \leqq k \leqq 19$を満たす整数であり$(j,\ k) = (0,\ 0)$を除く)

と表され，税込みの支払い総額Tは

$$T = (20j + k) + j = 21j + k$$

となる．以上より，Tとして決して現れない自然数は

$$\{\, 21j + 20 \mid j\text{は0以上の自然数} \,\}$$

である．

[(2) 考察]

(1)の考察が終わっていれば，(2)は考えやすいです．

$T = 777\cdots\cdots77$（7がm桁続く）

となるようなnが存在するということは，(1)の考察より

Tを21で割った余りが20にならない

ということです．21で割った余りは0以上20以下の整数のいずれかなので，20にさえならなければ, 0以上19以下のいずれかになることが確定し，必ずTとして現れることができます．

[(2) 解答]

存在する．

（理由）

$T = 777\cdots\cdots77$（7がm桁続く）

を21で割った余りが20にならないことを，背理法を用いて示す．つまり

$$T = 21j + 20$$

となる整数jが存在するとして矛盾を示す．この式は

$$T - 21j = 20$$

と変形できる．このとき左辺は7の倍数の差なので7の倍数であるが，右辺は7の倍数でないので矛盾する．

以上より，Tを21で割った余りは20にならない．よって(1)より，対応する自然数nは存在する．

（証明終）

（最後に）

この問題を初めて見たとき

「(1)の問題は自分で思いついて作成したかった！」

「(1)を出したら，なんで(2)を出さへんねん！」

と2つのことを同時に思いました（笑）

日常のちょっとしたことの中にも，数学や算数は顔を出します．これからも買い物をする際は，お釣りの硬貨の枚数がなるべく少なくなるように支払いをしつつ（でも，お店の人が忙しそうなときは，千円だけ出して計算しやすくする気遣いも忘れずに)，問題のネタが転がっていないか探していこうと思います．

（数学科　中西）