# 強者の戦略

それでは，前回の解答です．

## 第１問（数Ⅲ）

$a>0$ とする．曲線 $y=e^{-x^2}$ と $x$ 軸，$y$ 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，$y$ 軸のまわりに１回転してできる回転体を $A$ とする．

(1)　$A$ の体積 $V$ を求めよ．

(2)　点 $(t,\ 0)\ (-a\leqq t\leqq a)$ を通り $x$ 軸と垂直な平面による $A$ の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式

$$S(t)\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds$$

を示せ．

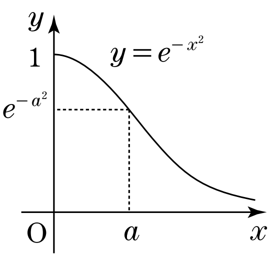
(3)　不等式

$$\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})}\leqq\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$$

を示せ．

＜解答＞

(1)　$x\geqq 0$ において $y=e^{-x^2}$ は単調に減少し，グラフは下のようになる．




$0\leqq x\leqq a$ のとき，$y>0$ より

$$y=e^{-x^2}\iff x^2=-\log y$$

であるから，求める体積 $V$ は

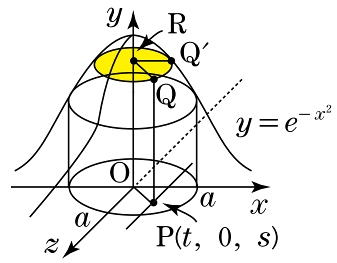
$$\begin{aligned}V&=\pi a^2e^{-a^2}+\pi\int_{e^{-a^2}}^{1}(-\log y)dy\\&=\pi a^2e^{-a^2}+\pi\Big[-y\log y+y\Big]_{e^{-a^2}}^{1}\\&=\pi(1-e^{-a^2})\end{aligned}$$

である．

(2)　$x$ 軸，$y$ 軸に垂直な方向に $z$ 軸をとる．
平面 $x=t$ 上の点

$$\mathrm{P}(t,\ 0,\ s)\quad\left(-\sqrt{a^2-t^2}\leqq s\leqq\sqrt{a^2-t^2}\right)$$

を通り，$y$ 軸に平行な直線と $A$ との交点を Q とし，Q を通り $y$ 軸に垂直な平面と $y$ 軸との交点を R とする．




このとき

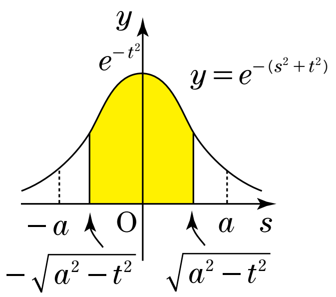
$$\mathrm{QR}^2=s^2+t^2$$

となるので，図のように点 Q を $xy$ 平面上の $x\geqq 0$ の部分にくるように点 R を中心に回転させた点を Q′ とすると

$$\mathrm{QP}=(\mathrm{Q}'\text{ の }y\text{ 座標 })=e^{-(s^2+t^2)}$$

となる．

したがって，$A$ を平面 $x=t$ で切った切り口を $sy$ 平面に図示すると次のようになる．




よって

$$S(t)=\int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}}e^{-(s^2+t^2)}ds$$

であり

$$-a\leqq-\sqrt{a^2-t^2},\ \sqrt{a^2-t^2}\leqq a$$

$$e^{-(s^2+t^2)}>0$$

であるから

$$S(t)\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds$$

が成り立つ．

(3)　(2) より

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-a}^{a} S(t)\,dt \\
&\leqq \int_{-a}^{a}\left(\int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}\,ds\right)dt \\
&= \int_{-a}^{a}\left(e^{-t^2}\int_{-a}^{a} e^{-s^2}\,ds\right)dt \\
&= \left(\int_{-a}^{a} e^{-s^2}\,ds\right)\left(\int_{-a}^{a} e^{-t^2}\,dt\right) \\
&= \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)^2
\end{aligned}
$$

である．これと (1) の結果より

$$\pi(1-e^{-a^2}) \leqq \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

が成り立ち，この両辺は正であるから

$$\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$$

が成り立つ．

□

＜コメント＞

数学科の川﨑です．今回の問題はいかがだったでしょうか？ (2) ができる人，できない人で差が付きそうです．回転体の求積は入試では頻出テーマですのでしっかりできるようにしておいてください．

以下設問ごとの補足です．

(1)　$y$ 軸回転の体積を求める問題です．回転体を扱う基本

「回転軸に垂直に切る」

にしたがって，$y$ 軸に垂直な平面で切り，断面の円の半径を求めます．逆関数を求める計算になりますね．

バームクーヘン分割の公式を知っている人は

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{0}^{a} 2\pi x e^{-x^2}\,dx \\
&= 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^a \\
&= \pi(1-e^{-a^2})
\end{aligned}
$$

と求めることもできます．この公式は，使う際には簡単に証明してから使うようにしましょう．

(2)　回転体 $A$ の平面 $x=t$ での断面を考えます．これがイメージできるかどうかが勝負の分かれ目です．

$zx$ 平面上に解答のように P をとり ( この P は底面の円の内側にあります )，そこから $y$ 軸の正の方向に上がっていくと，$A$ と交わるところが出てきます ( 解答中の Q)．この Q は $xy$ 平面上にありませんが，$A$ の側面上にある点ですので，

$y=e^{-x^2}$ 上にある点 (Q′) を $y$ 軸まわりに回転させた点になっています．RQ＝RQ′＝OP から，Q′ の $x$ 座標が分かり，これから

Q′ の $y$ 座標 (＝Q の $y$ 座標 )

がめでたく分かります．

これにより，回転体 $A$ の平面 $x=t$ による断面の方程式が分かり面積 $S(t)$ が立式できるという流れです．考え方は難しいかもしれませんが，着目すべき点は，境界上の点 (Q) と，その点の回転前の点 (Q′) のみですので，慣れてくれば自然と考えられるようになります．この考え方が必然と思えるようになれば回転体マスターです．

面積 $S(t)$ が立式できれば，被積分関数が正値であることに注意して，積分区間を評価してあげれば示すべき不等式を得ます．

(3)　(2) ができた人には易しい問題でしょう．断面積 $S(t)$ が分かりましたので，それを $x$ 方向で積分すると (1) の $V$ になります．そこで (2) の不等式を用いれば示す不等式が出てきます．

今回は，体積を求める問題で，「切断の向きを変えたらどうなる？」という問題でした．普段回転体の体積を考えるとき

「回転軸に垂直に切る」

という基本ができるのはもちろんのこと，回転軸ではない軸で切るとまた新たな発見があるよと教えてくれる問題でしたね．強者を目指す皆さんには，そこまでの「たくましさ」があると嬉しいです．

さて，それではおまけの問題を 2 問つけておきます．まず一つ目は回転体ではない立体の体積を求める問題です．どの軸に垂直に切りますか？どの軸で切っても求められるのですが，計算の手間はだいぶ違ってきます．

**問**

$xyz$ 空間において

$$x \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq y^2$$

をみたす立体の体積 $V$ を求めよ．

＜解 1＞　($y$ 軸に垂直な断面を考える )

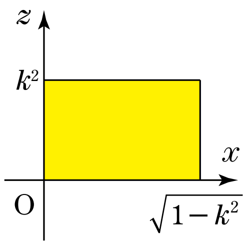
平面 $y=k$ での切り口は

$$0 \leqq x \leqq \sqrt{1-k^2},\ 0 \leqq z \leqq k^2$$

で表され，この領域が存在する条件は

$$1-k^2 \geqq 0 \iff -1 \leqq k \leqq 1$$

である．




よって，求める体積 $V$ は

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1} k^2\sqrt{1-k^2}\,dk \\
&= 2\int_0^1 k^2\sqrt{1-k^2}\,dk \quad \cdots\cdots(*) \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta \quad (\because\ \cos\theta \geqq 0) \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2^2}\sin^2 2\theta\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta \\
&= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

である ($(*)$ で，$k=\sin\theta$ と置換した )．

＜解 2＞　($x$ 軸に垂直な断面を考える )

平面 $x=k$ での切り口は

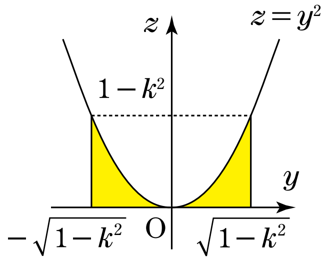
$$-\sqrt{1-k^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-k^2},\ 0 \leqq z \leqq y^2$$

で表され，この領域が存在する条件は

$$k \geqq 0 \quad かつ \quad 1-k^2 \geqq 0$$

$$\iff \quad 0 \leqq k \leqq 1$$

である．




よって，求める体積 $V$ は

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \left(2\int_0^{\sqrt{1-k^2}} y^2\,dy\right) dk \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 (1-k^2)^{\frac{3}{2}}\,dk
\end{aligned}$$

であり，$k=\sin\theta$ と置換すると

$$\begin{aligned}
V &= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

となる．

＜解 3＞　($z$ 軸に垂直な断面を考える )

平面 $z=k$ での切り口は

$$x \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1$$

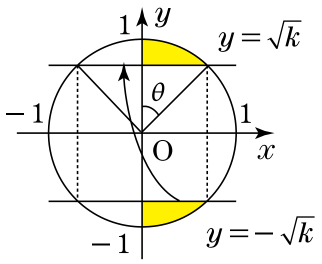
$$“\ y \leqq -\sqrt{k} \quad または \quad \sqrt{k} \leqq y\ ”$$

で表され，この領域が存在する条件は

$-1 \leqq y \leqq 1$ より

$$0 \leqq k \leqq 1$$

である．




ここで，図のように$\theta$をとると

$$\cos\theta=\sqrt{k},\ \sin\theta=\sqrt{1-k}$$

であり，図の色付き部分の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot2\theta-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin2\theta=\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta$$

となる．

$$k=\cos^2\theta$$

より

$$dk=-2\sin\theta\cos\theta\,d\theta \iff dk=-\sin2\theta\,d\theta$$

に注意して，求める体積$V$は

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1\left(\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right)dk\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\left(\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right)(-\sin2\theta)d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\theta\sin2\theta-\frac{1-\cos4\theta}{4}\right)d\theta\\&=\left[\frac{1}{2}\theta\cdot(-\cos2\theta)+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{8}\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\\&=\frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

である．

□

どうでしたか？$z$軸に垂直に切ってしまうと，断面に円の一部が出てしまい，面倒になってしまいますね．それに対して，$y$軸に垂直に切ると，断面が直線図形になり，簡単です．感覚を磨いてください．

それでは，もう一問いってみましょう．

$$\int e^{-x^2}\,dx$$

という積分は，初等関数で表すことができないことが知られていて，問題では不等式の形で出題されることがほとんどです．というわけで，不等式評価の問題をどうぞ．

**問**

次の不等式を示せ．

(1)　$x>0$において，$\log x\leqq x-1$

(2)　$\dfrac{2}{3}<\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx<\dfrac{\pi}{4}$

(3)　$\displaystyle\int_0^a e^{-x^2}\,dx<\dfrac{\pi}{2}$　$(a>0)$

(1)　$f(x)=x-1-\log x$

とおき，$x>0$で$f(x)\geqq0$を示す．

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

であるから，増減表は

| $x$ | (0) | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | 0 | ↗ |

となり，$f(x)\geqq0$である．

(2)　(1)で$x$を$e^{-x^2}$　$(>0)$として

$$-x^2\leqq e^{-x^2}-1 \iff 1-x^2\leqq e^{-x^2}$$

であり，この等号は常には成立しないので，両辺積分して

$$\int_0^1(1-x^2)\,dx<\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$
$$\iff \frac{2}{3}<\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

である．

また，(1)で$x$を$e^{x^2}$　$(>0)$として

$$x^2\leqq e^{x^2}-1 \iff e^{-x^2}\leqq\frac{1}{1+x^2}$$

であり，この等号も常には成立しないので，両辺積分して

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx<\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$\iff \int_0^1 e^{-x^2}\,dx<\frac{\pi}{4}$$

である．
( 右辺は $x=\tan\theta$ と置換積分すること，計算略．)

(3)　(2) の後半と同様にして

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx<\int_0^a\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

である．$\tan\theta=a$ となる $\theta$ を $\alpha$ とし $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

$$x=\tan\theta,\quad dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta,\quad \begin{array}{c|c} x & 0\to a\\ \hline \theta & 0\to\alpha\end{array}$$

と置換することで右辺は

$$\begin{aligned}\int_0^a\frac{1}{1+x^2}\,dx&=\int_0^\alpha\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\cos^2\theta\,d\theta\\&=\int_0^\alpha d\theta\\&=\alpha\\&<\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

である．

□

(2) は (1) をどう使うかという問題なのですが，思いつくのに苦労するかもしれません．練習してください．

＜参考＞

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$$

となることが知られています．この積分を**ガウス積分**と言います．この積分は様々なところに応用されていますが，その例を1つ紹介します．
　標準正規分布の確率密度関数は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

で与えられます．高校で扱う確率は「離散的」ですが，大学数学では「連続的」な確率も考えます．ざっくりというと，「確率」は「密度関数」という関数を「積分」したもので与えられると考えるのです．この場合，$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ が全体の確率になるのですが

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\cdot\sqrt{2}dt\quad(x=\sqrt{2}t)\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi}\\&=1\end{aligned}$$

と確かに1になりますね．
　大学では，極座標に置換したり，ガンマ関数と言われる関数を用いたりしてガウス積分の値を計算します．興味のある人は調べてみてください．

　それでは，今回はここまでにしたいと思います．また次回．

（数学科　川﨑）