

強者の戦略

数学科の野口です。前回の解答での予告通り、今年度は「連分数展開」をテーマにした問題の出題をすることにします。下記の問題について、1週間じっくり考えてみてください。

実数 x の小数部分を、 $0 \leq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 y のこととし、これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して、無限数列 $\{a_n\}$ の各項 $a_n (n=1, 2, 3, \dots)$ を次のように順次定める。

$$(i) \quad a_1 = \langle a \rangle$$

$$(ii) \quad \begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = 0 \end{cases}$$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき、数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\frac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3) a が有理数であるとする。 a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \frac{p}{q}$ と表すとき、 q 以上のすべての自然数 n に対して、 $a_n = 0$ であることを示せ。