実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $<x>$ で表す．実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める．

(i) $a_1 = <a>$

(ii) $\begin{cases} a_n \fallingdotseq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1) $a=\sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ．

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ．

(3) a が有理数であるとする．a を整数 p と自然数 q を用いて $a=\dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n = 0$ であることを示せ．

《(1)，(2) の考え方》

$\{a_n\}$ の定義が少し分かりづらいですが

$a_n (\fallingdotseq 0)$ の逆数をとって得られる数の小数部分を a_{n+1} とする．

$a_n = 0$ となれば，それ以降は 0 が続く．

ということです．

(1) は具体的に頑張るだけです．

(2) は「任意の自然数 n に対して～が成り立つ」というタイプの設定であり，こういう場合は

特殊な n で考えて，必要条件から攻める

というのが常套手段でした．「逆」についてもしっかり記述しましょう．

《(1)，(2) の解答》

(1) $1 < \sqrt{2} < 2$ より

$$a_1 = \left\langle \sqrt{2} \right\rangle = \sqrt{2} - 1$$

である．次に

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = \sqrt{2}+1$$

であり，$2 < \sqrt{2}+1 < 3$ より

$$a_2 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rangle = \left\langle \sqrt{2}+1 \right\rangle = \left(\sqrt{2}+1\right) - 2$$
$$= \sqrt{2} - 1$$

である．ここで，一般に，ある自然数 k に対して

$$a_k = \sqrt{2} - 1$$

であれば

$$a_{k+1} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rangle = \left\langle \sqrt{2}+1 \right\rangle = \left(\sqrt{2}+1\right) - 2$$
$$= \sqrt{2} - 1$$

となる．よって，帰納的に，すべての自然数 n に対して

$$a_n = \sqrt{2} - 1$$

である．

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ より

$$a_1 = a$$

つまり

$$<a> = a$$

が成り立つことが必要．よって

$$0 \leqq a < 1$$

であり，条件より

$$\frac{1}{3} \leqq a < 1$$

となる．このとき

$$1 < \frac{1}{a} \leqq 3$$

であるから，$\dfrac{1}{a}$ の整数部分は 1，2，3 のいずれかである．よって

$$a_2=\left\langle\frac{1}{a}\right\rangle=\begin{cases}\dfrac{1}{a}-1 & \left(1<\dfrac{1}{a}<2\right)\\ \dfrac{1}{a}-2 & \left(2\leqq\dfrac{1}{a}<3\right)\\ \dfrac{1}{a}-3 & \left(\dfrac{1}{a}=3\right)\end{cases}$$

と分類でき，$a_2=a$ が成り立つことが必要.

逆に，$a_1=a$ かつ $a_2=a$ が成り立てば，$a_1=a_2$ が成り立つことと，一般に $a_k=a_{k+1}$ であれば $a_{k+1}=a_{k+2}$ が成り立つ（☆）ことから，帰納的に $a_n=a$ が導けるので

$$0\leqq a<1 \text{ かつ } a_2=a$$

であれば十分である.

(i)　$1<\dfrac{1}{a}<2$ つまり $\dfrac{1}{2}<a<1$ のとき

$$\begin{aligned}&a_2=a\\ \iff\ &\frac{1}{a}-1=a\\ \iff\ &a^2+a-1=0\\ \iff\ &a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\quad\left(\because\ \frac{1}{2}<a<1\right)\end{aligned}$$

である.

(ii)　$2\leqq\dfrac{1}{a}<3$ つまり $\dfrac{1}{3}<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}&a_2=a\\ \iff\ &\frac{1}{a}-2=a\\ \iff\ &a^2+2a-1=0\\ \iff\ &a=\sqrt{2}-1\quad\left(\because\ \frac{1}{3}<a\leqq\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

である.

(iii)　$\dfrac{1}{a}=3$ つまり $a=\dfrac{1}{3}$ のとき

$a_2=0$ となり，不適である.

以上より

$$a=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \sqrt{2}-1$$

である.

（☆の証明）

$a_k=a_{k+1}\fallingdotseq 0$ のとき，定義より

$$a_{k+2}=\left\langle\frac{1}{a_{k+1}}\right\rangle,\quad a_{k+1}=\left\langle\frac{1}{a_k}\right\rangle$$

となり，$a_k=a_{k+1}$ より $a_{k+2}=a_{k+1}$ である.

$a_k=a_{k+1}=0$ のときは，$a_{k+2}=0$ より，$a_{k+2}=a_{k+1}$ である.

（後半部分の証明は，本問のためには不要）

《(3) の考え方》

いまいちイメージが湧かないと思うので，具体的な a で実験してみましょう.

$a=3$ のとき

$$a_1=<3>=0$$

となり，以下，帰納的に $a_n=0\ (n\geqq 2)$ となります.

つまり，a が整数の場合は，全て 0 となります.

$a=\dfrac{p}{q}$ における $q=1$ のときの場合なので，確かに 1 以上の n で $a_n=0$ となります.

$a=\dfrac{5}{3}$ のときはどうでしょうか？

$$a_1=\left\langle\frac{5}{3}\right\rangle=\frac{2}{3}$$

であり，この数の逆数を考えることにより

$$a_2=\left\langle\frac{3}{2}\right\rangle=\frac{1}{2}$$

となります．さらに逆数を考えて

$$a_3=<2>=0$$

となり，以下，全て 0 となり，3 以上の n で確かに $a_n=0$ となります.

$a=\dfrac{11}{4}$ のときはどうでしょうか？

$$a_1=\left\langle\frac{11}{4}\right\rangle=\frac{3}{4}$$

であり，この数の逆数を考えることにより

$$a_2=\left\langle\frac{4}{3}\right\rangle=\frac{1}{3}$$

となります．さらに逆数を考えて

$$a_3 = \langle 3 \rangle = 0$$

となり，以下，全て 0 となります．3 以上の n で $a_n=0$ なので，4 以上の n で成り立つと言えます．

あある n で $a_n=0$ となればそれ以降ずっと 0 になるのは上述の通りで，その最初のタイミング，つまり，初めて 0 となるときが大事です．初めて 0 となるための条件は，メカニズムより，その 1 つ手前の分子が 1 であることと分かります．

また，一連の作業を 1 つの式にしてみると，以下の連分数展開が浮かび上がります．

$$\frac{5}{3} = 1+\frac{2}{3} = 1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{11}{4} = 3+\frac{3}{4} = 3+\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)} = 3+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$$

もう 1 つ，分母が大きい別の例も載せます．

$$\frac{14}{9} = 1+\frac{5}{9} = 1+\frac{1}{\left(\frac{9}{5}\right)} = 1+\frac{1}{1+\frac{4}{5}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$$

今回の場合，赤字が数列 $\{a_n\}$ に相当します．分子が 1 になった時点で連分数展開は打ち止めでした．この打ち止めになるところ以降，a_n は 0 という扱いになります．

(3) で示すことは a_q 以降は全て 0 ということであり，これは，$q-1$ 回以内の時点で，打ち止めになることを示せばよいわけです．

連分数展開の書き進め方について，詳しくは前回の私の原稿を確認していただければと思いますが，今回の有理数について簡単にまとめると

① 整数部分と小数部分とに分ける
② 小数部分の逆数をとる形で，分母が 1 より大きいような分数とする
③ その分母について，改めて ①，② を行うことを繰り返す
④ 小数部分の分子が 1 になれば終了
（その数の逆数の小数部分は 0 になる）

という流れでしたね．

ここで大事なことは

1 回の手続きにより，考えるべき有理数の分母がどんどん小さくなっている

ということです．分母，つまり割る数が小さくなっていくので，分子に登場する数もどんどん小さくなり，いつかは分子が 1 になるというわけです．ただ

$q-1$ 回以内に分子が 1 になる

ことを目標に答案を作るのは少し面倒なので，答案では，この「分子」を，ある数をある数で割ったときの「余り」と捉え，この「余り」がどんどん小さくなっていくことを利用します．

では，以下，解答です．

《(3) の解答》

(3) 整数 p，自然数 q を用いた

$$a=\frac{p}{q}$$

について，p を q で割った商を q_1，余りを p_1 とすると

$$p = qq_1 + p_1 \quad (0 \leqq p_1 < q)$$

となる．すると

$$a = \frac{qq_1+p_1}{q} = q_1 + \frac{p_1}{q}$$

となり，このとき q_1 は整数，$0 \leqq \dfrac{p_1}{q} < 1$ であることに注意すると

$$a_1=\langle a\rangle=\frac{p_1}{q}$$

となる．ここで，$p_1=0$ であれば $a_1=0$ となり，以下，$a_2=a_3=\cdots\cdots=a_q=\cdots\cdots=0$ となるので，題意は成り立つ．

$p_1\fallingdotseq 0$ であれば，次は a_1 の逆数：$\dfrac{q}{p_1}$ について考えればよく，q を p_1 で割った商を q_2，余りを p_2 とすると

$$q=p_1q_2+p_2 \quad (0\leqq p_2<p_1)$$

となる．すると

$$\frac{1}{a_1}=\frac{q}{p_1}=\frac{p_1q_2+p_2}{p_1}=q_2+\frac{p_2}{p_1}$$

となり，q_2 は整数，$0\leqq\dfrac{p_2}{p_1}<1$ であることに注意すると

$$a_2=\left\langle\frac{1}{a_1}\right\rangle=\frac{p_2}{p_1}$$

となる．ここで，$p_2=0$ であれば $a_2=0$ となり，以下，$a_3=\cdots\cdots=a_q=\cdots\cdots=0$ となるので，題意は成り立つ．

$p_2\fallingdotseq 0$ であれば，次は a_2 の逆数：$\dfrac{p_1}{p_2}$ について考えればよい．

$$p_1=p_2q_3+p_3 \quad (0\leqq p_3<p_2)$$

となる整数 q_3，p_3 をとることができ，これより

$$a_3=\left\langle\frac{1}{a_2}\right\rangle=\left\langle\frac{p_1}{p_2}\right\rangle=\left\langle\frac{p_2q_3+p_3}{p_2}\right\rangle$$
$$=\left\langle q_3+\frac{p_3}{p_2}\right\rangle=\frac{p_3}{p_2}$$

となる．

以下，a_n が初めて 0 になる（そのときの n を N とする）ところまで同じことを繰り返し，p_4，p_5，p_6，……，p_N を定義すると

$$0=p_N<p_{N-1}<\cdots\cdots<p_2<p_1<q$$

が成り立つ．ここで，p_1，p_2，…，p_N は 0 以上 q 未満つまり 0 以上 $q-1$ 以下の異なる N 個の整数であるから，N が q を超えることはない．よって，$N\leqq q$ であり，これは q 以下の自然数 N で $a_N=0$ となることを意味する．一般に

$$a_k=0 \text{ のとき } a_{k+1}=0$$

であることから，これにより，$n\geqq N$ を満たすすべての n で $a_n=0$ となる．

N は q 以下より，q 以上のすべての自然数 n に対して $a_n=0$ となることが示された．

《終わりに》

いかがだったでしょうか？

出典は 2011 年の東京大学の理科（理系）の問題です．なお，文科では，(3) がなく (1)，(2) のみでした．

連分数展開を知っていればイメージは掴みやすいはずですが，知らないとなると，見たこともない漸化式であることもあり，かなり難解に感じることでしょう．

余談ですが，東大の場合は，実際は簡単な内容であっても，難しい（難しく見える）問題文にしてあることが多いです．試験会場であっても，見た目に惑わされたり面食らったりせず，まずは手を動かしてとりあえず考えてみる，という姿勢が大事だったりもします．

では，今回はここまでです．次回も，また別の切り口で「連分数展開」がテーマになっている問題を出題します．では，また次回．

（数学科　野口）