強者の戦略

今回の問題は【慶應義塾大学】のかなり古い入試問題から出題しました.

それでは，まず問題の確認です.

> 問題
>
> 平面上の 2 点 P，Q が中心 O，半径 r の円 C に関して鏡像の関係にあるというのは，3 点 O，P，Q が O を端点とする半直線上にあって，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2$ を満たすことをいう.
>
> (1) α が正の数のとき，複素数平面上で中心 α，半径 α の円を C_α とする．円 C_α に関して点 z と鏡像の関係にある点を w とする．$w=f_\alpha(z)$ とするとき，$f_\alpha(z)$ を求めよ.
>
> (2) α がすべての正の数を動くとき，$f_\alpha(i)$ の描く曲線を求めよ.

平面上の 2 点 P，Q が中心 O，半径 r の円 C に関して鏡像の関係にあるというのは，3 点 O，P，Q が O を端点とする半直線上にあって，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2$ を満たすことをいうのですが，一般的には鏡像というよりも，反転という言葉で定義されます。どちらの言葉も鏡に映った像という意味です．では，どんな鏡に映った像なのでしょうか.

それは，中心 O，半径 r の球面状の鏡です．この鏡における点 P の像が点 Q になります．この空間図形を半直線 OP を含む平面で切った切り口の図形が反転（鏡像）を表す図形になります.

この反転（鏡像）という図形変換では，原点を除く平面上のすべての点 P を点 Q に変換することができ，円または直線が円または直線に移されます．点 P の軌跡が①原点を通るならば，点 Q の軌跡は直線になり，②原点（円 C の中心）を通らないならば，点 Q の軌跡は円になり，③直線になるならば，点 Q の軌跡は原点を通り，④円になるならば，点 Q の軌跡は原点を通らないという変換になります。

円 C の半径を 1 として，単位円 C に関する反転を考え，$kz\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+c=0$（$k$，$c$ は実数）（α は問題の α と無関係）を点 z が満たすとき，変換 $w=f(z)=\dfrac{1}{\bar{z}}$ によって点 w が満たす式は，$cw\bar{w}+\bar{\alpha}w+\alpha\bar{w}+k=0$ となり，z と w で k と c が入れ替わることから，簡単に説明できます.

それでは，問題を解いていきましょう.

［解答］

(1) 複素数平面上で原点を O とし，3 点 A，P，Q を表す複素数を α（$\alpha>0$），z，w とする.

問題にある鏡像の定義より，円 C_α に関して，点 P と点 Q が鏡像の関係にあるとは，3 点 A，P，Q が A を端点とする半直線上にあって，$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=\alpha^2$ を満たすことである.

$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=\alpha^2$ であるから，

$|z-\alpha|\cdot|w-\alpha|=\alpha^2 \iff |w-\alpha|=\dfrac{\alpha^2}{|z-\alpha|}$ である.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と同じ向きの単位ベクトル $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|}$ を表す複素数は

$\dfrac{z-\alpha}{|z-\alpha|}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を表す複素数は，α が正の数なので，実数であることに注意して，

$$w-\alpha=|w-\alpha|\cdot\frac{z-\alpha}{|z-\alpha|}=\frac{\alpha^2(z-\alpha)}{|z-\alpha|^2}=\frac{\alpha^2}{\bar{z}-\alpha}$$

となる.

よって，$w=\dfrac{\alpha^2}{\bar{z}-\alpha}+\alpha=\dfrac{\alpha\bar{z}}{\bar{z}-\alpha} \iff f_\alpha(z)=\dfrac{\alpha\bar{z}}{\bar{z}-\alpha}$ である.

(2) $f_\alpha(i)=\dfrac{\alpha\bar{i}}{\bar{i}-\alpha}=\dfrac{-\alpha i}{-i-\alpha}=\dfrac{\alpha i(\alpha-i)}{\alpha^2+1}=\dfrac{\alpha+\alpha^2 i}{\alpha^2+1}$

であるから，$f_\alpha(i)$ の実部を x，虚部を y として，

$x=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+1}$，$y=\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+1}$ となる．α がすべての正の数を動くとき，$\alpha=\tan\dfrac{\theta}{2}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおき，2 倍角，半角の公式より，$x=\dfrac{1}{2}\sin\theta$，$y=\dfrac{1}{2}(1-\cos\theta)$ となるので，

$x>0$ で，$x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ となるから，点 (x,y) の軌跡は，

円の一部分 $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\ (x>0)$ である.