強者の戦略

今回の問題は【2015 お茶の水女子大学】の入試問題から出題しました．研伸館の講義の中では，(1) の問題が正八角形や正十二角形で，かつ，場合の数を求める問題として，登場していると思います．

それでは，まず問題の確認です．

> 問題
>
> (1)　正 6 角形の 6 つの頂点を 1，2，3，4，5，6 とする．サイコロを 3 回振って出た目を順に i，j，k とする．頂点 i，j，k が三角形をなす確率，直角三角形をなす確率，鋭角三角形をなす確率，鈍角三角形をなす確率をそれぞれ求めよ．
>
> (2)　正 n 角形の n 個の頂点を 1，2，……，n とする．番号 1，2，……，n が等確率で現れるくじを引いて戻すことを 3 回繰り返し，出た番号を順に i，j，k とする．頂点 i，j，k が直角三角形をなす確率，鋭角三角形をなす確率をそれぞれ求めよ．

(1) は三角形が合計 20 個しかできないので，具体的に書き並べても解けるのですが，(2) に繋がるように，なるべく一般的な解法で解いていきます．

特に問題では鋭角三角形をなす確率のほうが先に問われていますが，(2) でも使える一般的な解法では，鈍角三角形のほうが個数を数えやすいので

鈍角三角形　→　鋭角三角形

の順番に入れ替えて，答案を作成します．

［解答］

(1)　正六角形の頂点が，反時計回りに

1，2，3，4，5，6

と並んでいるとして，一般性を失わない．正六角形の頂点は，3 点が一直線上に並ぶことはないので，頂点 i，j，k が三角形をなすのは，i，j，k がすべて異なるときであるから，その確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{P}_3}{6^3}\left(=\frac{{}_6\mathrm{C}_3\cdot 3!}{6^3}\right)=\frac{5}{9}$$

である．

次に直角三角形となるのは，正六角形の外接円の直径を 1 辺にもつときで，その直径を選ぶ場合の数は 2 つの頂点

1 と 4，2 と 5，3 と 6

を結んだ線分から 1 つ選ぶので 3 通り．そのそれぞれに対して，残りの 1 つの頂点の選び方が ${}_4\mathrm{C}_1=4$（通り）ずつある．サイコロの目が出る順序の並び替えも考えて，求める確率は

$$\frac{3\cdot{}_4\mathrm{C}_1\cdot 3!}{6^3}=\frac{1}{3}$$

である．

《解説》

ここまでは難しくありませんが，三角形の個数を数える問題ではなく確率を求める問題なので，確率の分子を考える際に

（条件に合う三角形の個数）× 3！

となることに注意しましょう．

次に，鈍角三角形になる確率ですが，鈍角三角形の個数の求め方として有名なものには

「ある直径をまたがないように頂点を選ぶ」

「直径より短い弦を選んで，

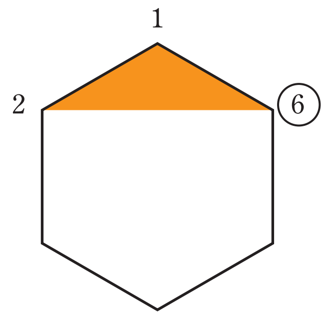
残りの頂点を選ぶ」

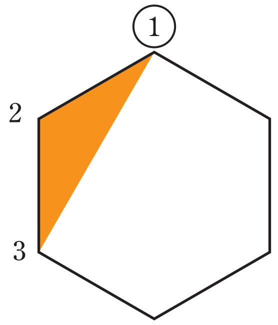
の 2 つがあります．この 2 つの解法を紹介するために，ここでは特別に

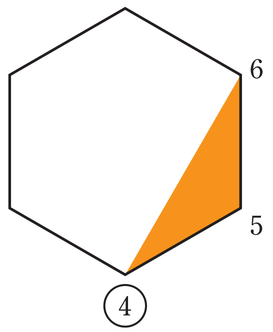
『三角形の頂点を反時計回りに見たときに

一番最初にくる頂点』

というものを定義しましょう．いくつか具体例を挙げると，以下の図の◯のついている頂点のことを指しています．







この特別な頂点を定義することで，たとえば 1，2，3 の頂点を持つ三角形に対して

1 を基準に作ったとき
2 を基準に作ったとき
3 を基準に作ったとき

を重複して数えることを防ぐことができます．『反時計回りに見たときに一番最初にくる頂点』は 1 ですから

1 を基準に作ったとき

のみに絞って数えれば，1 つの三角形に対して 1 回だけ数えることができるわけです．

以下，この特別な頂点を用いて，有名な 2 つの解法のそれぞれで，鈍角三角形になる確率を求めてみましょう．

［(1) 解答続き］

次に，鈍角三角形となる確率を考える．

【解法 1】

『三角形の頂点を反時計回りに見たときに一番最初にくる頂点』として 1 を選んだとき，残りの 2 頂点を「1 と 4 を結んだ直径」をまたがないように選ぶと鈍角三角形となる．この場合の数は，頂点の 2，3 を選ぶので 1 通り．

『反時計回りに見たときに一番最初にくる頂点』の選び方は ${}_6C_1=6$（通り）あるので，サイコロの目が出る順序の並び替えも考えて，求める確率は

$$\frac{1\cdot{}_6C_1\cdot 3!}{6^3}=\frac{1}{6}$$

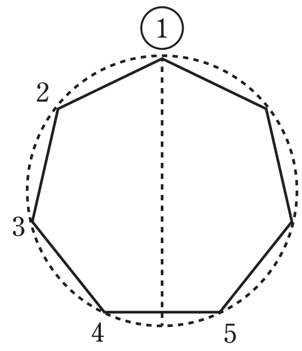
である．

（【解法 1】の補足）

たとえば正七角形の場合は『反時計回りに見たときに一番最初にくる頂点』として 1 を選んだとき，「1 と《4 と 5 の中点》を結んだ直径」をまたがないように選ぶと鈍角三角形になるので

2，3，4

のうちから 2 つの頂点を選ぶことになります．



よって，鈍角三角形の個数は

$${}_3C_2\cdot{}_7C_1=21\text{（個）}$$

となります．

【解法 2】

『三角形の頂点を反時計回りに見たときに一番最初にくる頂点』として 1 を選ぶ．次に，鈍角三角形の鈍角の対辺として，直径よりも短い弦を選ぶと

1 と 3

を結んだ線分となり，この 2 頂点の間にある劣弧上の頂点を 3 つ目の頂点として選べば鈍角三角形となる．その頂点の選び方は，2 のみの 1 通りである．

反時計回りに見たときに一番最初にくる頂点の選び方は ${}_6C_1=6$（通り）あるので，求める確率は

$$\frac{1\cdot{}_6\mathrm{C}_1\cdot 3!}{6^3}=\frac{1}{6}$$

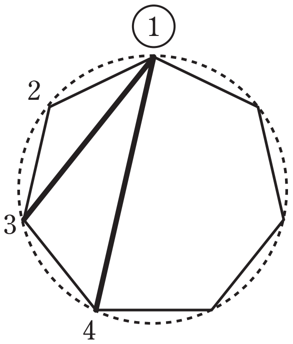
である．

(【解法２】の補足)

たとえば正七角形の場合は『反時計回りに見たときに一番最初にくる頂点』として１を選んだとき，鈍角三角形の鈍角の対辺として，直径よりも短い弦を選ぶと

1 と 3，1 と 4

を結んだ線分のいずれかになります．



この２頂点の間にある劣弧上の頂点を３つ目の頂点として選べば鈍角三角形となり

1 と 3 の弦に対しては 2 のみで 1 個

1 と 4 の弦に対しては 2，3 の 2 個

で合計 3 個作ることができます．よって，鈍角三角形の個数は

$$(1+2)\cdot{}_7\mathrm{C}_1=21\text{（個）}$$

となります．

最後に，(【解法１】【解法２】いずれの場合でも) 鋭角三角形となるのは，三角形となる事象のうち，直角三角形になる，または，鈍角三角形になることの余事象なので，求める確率は

$$\frac{5}{9}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$$

である．

《解説》

以上が (1) の解答になります．以下 (2) では，ここまでで説明してきた解法を一般的に正 n 角形に対して用いてみましょう．

その際，n が奇数の場合は，ある頂点のちょうど反対側には頂点がないことに気をつけると，次のような解答になります．

［(2) 解答］

正 n 角形の頂点が，反時計回りに

$1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$

と並んでいるとして，一般性を失わない．また，n は 3 以上の自然数である．

まず，直角三角形になる確率を考える．

(i)　n が偶数のとき

正 n 角形の外接円の直径を 1 辺にもつときで，その直径の選び方は 2 つの頂点

$$k \text{ と } k+\frac{n}{2}\quad\left(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots,\ \frac{n}{2}\right)$$

を結んだ線分から 1 つ選ぶので $\dfrac{n}{2}$ 通り．そのそれぞれに対して，残りの 1 つの頂点の選び方が

$${}_{n-2}\mathrm{C}_1=n-2\text{（通り）}$$

ずつあるので，求める確率は

$$\frac{\frac{n}{2}(n-2)\cdot 3!}{n^3}=\frac{3(n-2)}{n^2}$$

である．

(ii)　n が奇数のとき

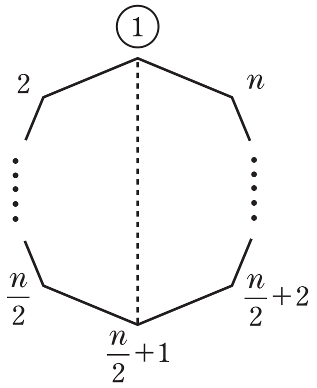
正 n 角形の 2 頂点を結ぶ線分が，外接円の直径になることはないので，直角三角形はできない．よって，求める確率は 0 である．

次に，鈍角三角形となる確率を求めるために『三角形の頂点を反時計回りに見たときに一番最初にくる頂点』として 1 を選んだときを考える．

【解法１】

(i)　n が偶数のとき

n が 6 以上の偶数のときは，残りの 2 頂点を「1 と $\dfrac{n}{2}+1$ を結んだ直径」をまたがないように選ぶと鈍角三角形となる．



この場合の数は

$$2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ \frac{n}{2}$$

から２頂点を選ぶので

$$\begin{aligned}{}_{\frac{n}{2}-1}\mathrm{C}_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\end{aligned}$$

通りある．$n=4$ のときは鈍角三角形はできないので，上の結果は $n=4$ のときも成り立つ．『反時計回りに見たときに一番最初にくる頂点』の選び方は ${}_n\mathrm{C}_1=n$（通り）あるので，鈍角三角形になる確率は

$$\begin{aligned}&\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\cdot n\cdot 3!}{n^3}\\ &= \frac{3(n-2)(n-4)}{4n^2}\end{aligned}$$

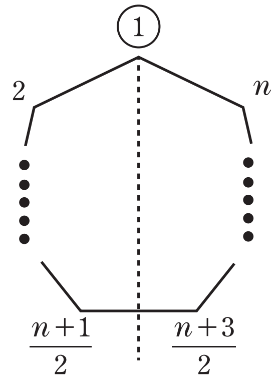
である．

(ii)　n が奇数のとき

１以外の頂点は，１を通る直径の両側に $\frac{n-1}{2}$ 個ずつあるので

$$1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}$$

より，n が５以上の奇数のときは，残りの２頂点を「１と《 $\frac{n+1}{2}$ と $\frac{n+3}{2}$ の中点》を結んだ直径」をまたがないように選ぶと鈍角三角形となる．



この場合の数は

$$2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ \frac{n+1}{2}$$

から２頂点を選ぶので

$$\begin{aligned}{}_{\frac{n+1}{2}-1}\mathrm{C}_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\left(\frac{n+1}{2}-2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\end{aligned}$$

通りある．$n=3$ のときは鈍角三角形はできないので，上の結果は $n=3$ のときも成り立つ．(i) と同様に考えて，鈍角三角形になる確率は

$$\begin{aligned}&\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\cdot n\cdot 3!}{n^3}\\ &= \frac{3(n-1)(n-3)}{4n^2}\end{aligned}$$

である．

【解法２】

(i)　n が偶数のとき

n が６以上の偶数のときは，鈍角三角形の鈍角の対辺として，直径よりも短い弦を選ぶと

$$1 \text{ と } k \quad \left(k=3,\ 4,\ \cdots\cdots\cdots,\ \frac{n}{2}\right)$$

を結んだ線分となり，この２頂点の間にある劣弧上の頂点を３つ目の頂点として選べば鈍角三角形となる．その頂点の選び方は，それぞれの k に対して

$$k-2 \text{（個）}$$

ずつある．『反時計回りに見たときに一番最初にくる頂点』の選び方は ${}_n\mathrm{C}_1=n$（通り）あるので，鈍角三角形になる確率は

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=3}^{\frac{n}{2}}(k-2)\cdot n\cdot 3!}{n^3}$$
$$=\frac{\dfrac{1+\left(\dfrac{n}{2}-2\right)}{2}\left(\dfrac{n}{2}-2\right)\cdot 6}{n^2}$$
$$=\frac{3(n-2)(n-4)}{4n^2}$$

である．$n=4$ のときは鈍角三角形はできないので，上の結果は $n=4$ のときも成り立つ．

(ii)　n が奇数のとき

n が 5 以上の奇数のときは，鈍角三角形の鈍角の対辺として，直径よりも短い弦を選ぶと

$$1 \text{ と } k \quad \left(k=3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ \frac{n+1}{2}\right)$$

を結んだ線分となり，この 2 頂点の間にある劣弧上の頂点を 3 つ目の頂点として選べば鈍角三角形となる．その頂点の選び方は，それぞれの k に対して

$$k-2 \quad (\text{個})$$

ずつある．(i) と同様に考えて，鈍角三角形になる確率は

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=3}^{\frac{n+1}{2}}(k-2)\cdot n\cdot 3!}{n^3}$$
$$=\frac{\dfrac{1+\left(\dfrac{n+1}{2}-2\right)}{2}\left(\dfrac{n+1}{2}-2\right)\cdot 6}{n^2}$$
$$=\frac{3(n-1)(n-3)}{4n^2}$$

である．$n=3$ のときは鈍角三角形はできないので，上の結果は $n=3$ のときも成り立つ．

(【解法１】【解法２】いずれの場合でも）頂点 i，j，k が三角形をなす確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{P}_3}{n^3}=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}$$

であるから，(1) と同様に余事象の確率を考えて，鋭角三角形になる確率は

(i)　n が偶数のとき

$$\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}-\frac{3(n-2)}{n^2}-\frac{3(n-2)(n-4)}{4n^2}$$
$$=\frac{(n-2)(n-4)}{n^2}-\frac{3(n-2)(n-4)}{4n^2}$$
$$=\frac{(n-2)(n-4)}{4n^2}$$

(ii)　n が奇数のとき

$$\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}-0-\frac{3(n-1)(n-3)}{4n^2}$$
$$=\frac{(n-1)\{4(n-2)-3(n-3)\}}{4n^2}$$
$$=\frac{(n-1)(n+1)}{4n^2}$$

である．

（最後に）

高校 3 年生で強者たらんとしている人から「標準的な問題までは解けるのですが，応用問題になると，どこから手をつけていいかわからなくなって困っています」という質問を，最近，受けるようになりました．

標準的な解法が身についてきたからこその質問なので良い質問なのですが，この質問を解決する万能な解決法は残念ながら存在しないのだと思います．ただ，解決法の 1 つとして，別解にも興味を持ち，1 つの問題に対して複数のアプローチを試みることができるようになる，というものがあると考えています．今回の問題の場合，鈍角三角形の確率を求める際に【解法２】ではシグマ計算（もしくは，等差数列の和の公式）を用いるため，数学 IA しか学んでいない頃の授業では登場しなかったかもしれないのですが，すでに数学 IIB まで習い終えている人は是非習得して頂き，自分の頭の中にある解法の幅を広げていってほしいと思います．

（数学科　中西）