さいころを n 回投げて出た目を順に X_1, X_2, ……, X_n とする．さらに

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 \\ Y_k = X_k + \dfrac{1}{Y_{k-1}} \quad (k=2,\ \cdots\cdots,\ n) \end{cases}$$

によって Y_1, Y_2, ……, Y_n を定める．

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$$

となる確率 p_n を求めよ．

《考え方》

$$Y_n = X_n + \frac{1}{Y_{n-1}}$$

について，時系列に沿って X_1, X_2, ……と添字番号が小さい方から順に当てはめて，Y_1, Y_2, ……を考えていこうとすると，本質が見えません（毎回毎回，逆数をとる羽目になる）．

今回は，まず大きな構造に気付きましょう．

$$Y_n = X_n + \frac{1}{Y_{n-1}}$$

に対して

$$Y_{n-1} = X_{n-1} + \frac{1}{Y_{n-2}}$$

なので，上の式に代入して Y_{n-1} を消去すると

$$\begin{aligned} Y_n &= X_n + \frac{1}{Y_{n-1}} \\ &= X_n + \cfrac{1}{X_{n-1} + \cfrac{1}{Y_{n-2}}} \end{aligned}$$

となります．さらに

$$Y_{n-2} = X_{n-2} + \frac{1}{Y_{n-3}}$$

であることから

$$Y_n = X_n + \cfrac{1}{X_{n-1} + \cfrac{1}{X_{n-2} + \cfrac{1}{Y_{n-3}}}}$$

となります．もうイメージは掴めましたか？以下繰り返すと・・・

$$\begin{aligned} Y_n &= X_n + \cfrac{1}{X_{n-1} + \cfrac{1}{X_{n-2} + \cdots + \cfrac{1}{X_2 + \cfrac{1}{Y_1}}}} \\ &= X_n + \cfrac{1}{X_{n-1} + \cfrac{1}{X_{n-2} + \cdots + \cfrac{1}{X_2 + \cfrac{1}{X_1}}}} \end{aligned}$$

となります．連分数展開ですね．Y_n は上のように，n 回投げて得られる 6^n 通りのさいころの出目で，確定します．ここで，X_n の値が Y_n の整数部分に相当することに気付きましょう．なので，$X_n \geqq 3$ とすると

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq X_n + \frac{1}{Y_{n-1}} \leqq 1+\sqrt{3}$$

は満たさない（右辺は 3 未満）ため，まずは

$X_n = 1$　または　$X_n = 2$

に限られることが分かります．時系列としては

X_1, X_2, ……, X_n

と，添字番号が小さい方から順に数字を決めていきますが，構図的に，「X_n がどうなっているか」から切り崩さないと，スタートが切れません．そこで，仮に $X_n = 1$ としてみましょう．このとき

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq 1 + \frac{1}{Y_{n-1}} \leqq 1+\sqrt{3}$$

となり，この時点で

$$1 < 1 + \frac{1}{Y_{n-1}} < 2$$

より，上から押さえる不等式：

$$1 + \frac{1}{Y_{n-1}} \leqq 1+\sqrt{3}$$

$$\left(\iff Y_n \geqq \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

の成立は確定するので，あとは

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq 1+\frac{1}{Y_{n-1}}$$

について考えれば十分です．これを変形すると

$$\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \leqq \frac{1}{Y_{n-1}}$$

$$\iff \quad Y_{n-1} \leqq \frac{2}{-1+\sqrt{3}}$$

$$\iff \quad Y_{n-1} \leqq 1+\sqrt{3}$$

となり，先ほど成立が確定した，上から押さえる不等式が再登場します．

これは

$$X_{n-1}+\frac{1}{Y_{n-2}} \leqq 1+\sqrt{3}$$

と書き直すことができるので，先ほどと同じように X_{n-1} をまず考えます．先ほどと違うところは，下から押さえる不等式がないので

$X_{n-1}=1$ であれば，その瞬間クリアー

となるところです．時系列が逆なので少し分かりづらいですが，その手前で振ってきたサイコロの目，つまり

X_{n-2}，X_{n-1}，……，X_2，X_1

は何でも良くなるということです（確率 1）．また，$X_{n-1} \geqq 3$ がダメなのは同じで，$X_{n-1}=2$ のときは

$$2+\frac{1}{Y_{n-2}} \leqq 1+\sqrt{3}$$

$$\iff \quad \frac{1}{Y_{n-2}} \leqq -1+\sqrt{3}$$

$$\iff \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_{n-2}$$

となり，再度下から押さえる不等式となります．闘いはまだまだ続くわけです（笑）．

一方で，冒頭の X_n について，$X_n=2$ としてみましょう．このとき

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq 2+\frac{1}{Y_{n-1}} \leqq 1+\sqrt{3}$$

となり，下から押さえる不等式の成立は確定します．なので，上から押さえる不等式の方だけ考えると

$$2+\frac{1}{Y_{n-1}} \leqq 1+\sqrt{3}$$

$$\iff \quad \frac{1}{Y_{n-1}} \leqq -1+\sqrt{3}$$

$$\iff \quad \frac{1}{-1+\sqrt{3}} \leqq Y_{n-1}$$

$$\iff \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_{n-1}$$

となり，今後は下から押さえる不等式が再登場します．これより

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq X_{n-1}+\frac{1}{Y_{n-2}}$$

となり，先ほどとは違って，$X_{n-1} \geqq 2$ のときはクリアー，$X_{n-1}=1$ のときは

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq 1+\frac{1}{Y_{n-2}}$$

$$\iff \quad \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \leqq \frac{1}{Y_{n-2}}$$

$$\iff \quad Y_{n-2} \leqq 1+\sqrt{3}$$

となり，闘いが続きます．

この先の展開が見えますか？

不等式としては，「$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ 以上」「$1+\sqrt{3}$ 以下」のたった 2 つしか登場せず，その際，整数部分に相当する X_k の値による分類で

- ダメ
- クリアー
- 不等式が逆転して，番号が下がった上でまだ続く

のいずれかに推移します．重要なのは，「まだ続く」のときであり，キリがないので，「漸化式」の利用を考えましょう．

細かい設定などは，以下の解答にてご確認ください．では，以下，解答例です．

《解答》

定義より，帰納的に

$$Y_k \geqq 1$$

ゆえ

$$0 < \frac{1}{Y_k} \leqq 1$$

が成り立つ．

いま，自然数 k に対して

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_k \text{ となるような確率を } q_k$$

$$Y_k \leqq 1+\sqrt{3} \text{ となるような確率を } r_k$$

とおく．まず，q_k，r_k の関係式を求めておく．

<q_k について>

自然数 k に対して

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_{k+1}$$

$$\iff \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq X_{k+1} + \frac{1}{Y_k}$$

であり，$0 < \dfrac{1}{Y_k} \leqq 1$ より $X_{k+1} \geqq 2$ のときは必ず成り立つ．また $X_{k+1}=1$ のときは

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq 1 + \frac{1}{Y_k}$$

$$\iff \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \leqq \frac{1}{Y_k}$$

$$\iff Y_k \leqq 1+\sqrt{3}$$

となるので，これが成り立つ確率は r_k である．

以上より，まとめると，$k \geqq 1$ に対して

$$q_{k+1} = \frac{5}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot r_k$$

$$\iff q_{k+1} = \frac{1}{6}r_k + \frac{5}{6} \quad \cdots\cdots ①$$

となる．

<r_k について>

自然数 k に対して

$$Y_{k+1} \leqq 1+\sqrt{3}$$

$$\iff X_{k+1} + \frac{1}{Y_k} \leqq 1+\sqrt{3}$$

であり，$0 < \dfrac{1}{Y_k} \leqq 1$ より $X_{k+1} \geqq 3$ のとき，これは成り立たない．一方，$X_{k+1}=1$ のときは必ず成り立つ．また $X_{k+1}=2$ のときは

$$2 + \frac{1}{Y_k} \leqq 1+\sqrt{3}$$

$$\iff \frac{1}{Y_k} \leqq -1+\sqrt{3}$$

$$\iff \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_k$$

となるので，これが成り立つ確率は q_k である．

以上より，まとめると，$k \geqq 1$ に対して

$$r_{k+1} = \frac{4}{6}\cdot 0 + \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot q_k$$

$$\iff r_{k+1} = \frac{1}{6}q_k + \frac{1}{6} \quad \cdots\cdots ②$$

となる．

以下

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$$

となるような確率 p_n を求める．$\{p_n\}$ の漸化式を考えるために，p_{n+1} について考える．

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_{n+1} \leqq 1+\sqrt{3}$$

$$\iff \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq X_{n+1} + \frac{1}{Y_n} \leqq 1+\sqrt{3} \quad \cdots\cdots ③$$

であるから

$$1 < \frac{1+\sqrt{3}}{2} < 2$$

および

$$2 < 1+\sqrt{3} < 3$$

に注意すると

$$X_{n+1}=1 \quad \text{または} \quad X_{n+1}=2$$

に限られる．

強者の戦略

(i)　$X_{n+1}=1$ のとき

$$③ \iff \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq 1+\frac{1}{Y_n} \leqq 1+\sqrt{3}$$
$$\iff \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \leqq \frac{1}{Y_n} \leqq \sqrt{3}$$
$$\iff \frac{1}{\sqrt{3}} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$$

となり，$Y_n \geqq 1$ であるから

$$Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$$

となることが条件である．これが成り立つ確率は r_n である．

(ii)　$X_{n+1}=2$ のとき

$$③ \iff \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq 2+\frac{1}{Y_n} \leqq 1+\sqrt{3}$$
$$\iff \frac{-3+\sqrt{3}}{2} \leqq \frac{1}{Y_n} \leqq \sqrt{3}-1$$
$$\iff \frac{1}{Y_n} \leqq \sqrt{3}-1 \quad (\because\ Y_n>0)$$
$$\iff \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n$$

となり，これが成り立つ確率は q_n である．

(i)，(ii) は排反であるから

$$p_{n+1}=\frac{1}{6}r_n+\frac{1}{6}q_n$$

となる．さらに，①，② より，$n \geqq 2$ に対して

$$p_{n+1}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}q_{n-1}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}r_{n-1}+\frac{5}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}q_{n-1}+\frac{1}{6}r_{n-1}\right)+\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6} \quad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ．いま

$$p_1=\frac{1}{6}$$
$$p_2=\frac{1}{6}q_1+\frac{1}{6}r_1=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{7}{36}$$

であるから，④ は $n=1$ のときも成り立つ．

よって，④ を変形して

$$p_{n+1}-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}\left(p_n-\frac{1}{5}\right)$$

であるから

$$p_n-\frac{1}{5}=\left(p_1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$
$$\iff p_n=\frac{1}{5}-\frac{1}{30}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \quad \left(\because\ p_1=\frac{1}{6}\right)$$
$$\iff p_n=\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

である．これが求める確率である．

《補足 1》

時系列としては最後に出る目，つまり X_{n+1} の値で場合分けして漸化式を作る形でした．普通の確率漸化式とは様子が随分違いますが

最後の 1 手で場合分け

という，スタンダードなものになっています．

そして

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_k$ となるような確率を q_k

$Y_k \leqq 1+\sqrt{3}$ となるような確率を r_k

という確率設定に対し

$Y_{k+1} \leqq 1+\sqrt{3}$ となる確率

を考えていたら

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_k$ となる確率

が登場し，上手く相互的に補い合う形で連立漸化式ができました．それ以外の，例えば

$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \leqq Y_k$ となる確率

などが登場したときは，設定した q_k，r_k が全く機能せず新しく別の確率を設定する必要が出るので，お手上げだったはずです．

なお，このように上手く同じ数字が出てくる理由は，連分数展開の形を見たら頷けるはずです．

その説明のために，まず，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ および $1+\sqrt{3}$ の連分数展開をしましょう．

$$\sqrt{3}-1=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}+1}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}1+\sqrt{3}&=2+(\sqrt{3}-1)\\&=2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}\quad\cdots\cdots(*)\\&=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{3}-1}{2}}\\&=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}\end{aligned}$$

となり，ここで最後の分数の分母に，最初の数 $1+\sqrt{3}$ が出てきたので，以下繰り返します．つまり

$$1+\sqrt{3}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}$$

と，2，1 を繰り返すことが分かります．もう1つの $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ については，上の連分数展開の $(*)$ で登場していますので，以降の結果を流用することにより

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}$$

と分かります．こちらは，1，2 を繰り返します．

いま，見た目の煩雑さを避けるため

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n$$

の方だけ取り上げて考えてみます．

それぞれ書き換えると

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}\leqq X_n+\frac{1}{Y_{n-1}}$$

となります．左辺は，「1，2 の繰り返し」です．これに対し，$X_n=1$ とすると

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}\leqq 1+\frac{1}{Y_{n-1}}$$

$$\iff\quad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}\leqq\frac{1}{Y_{n-1}}$$

$$\iff\quad Y_{n-1}\leqq 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}$$

となります．右辺が「2，1 の繰り返し」であることを踏まえると

$$Y_{n-1}\leqq 1+\sqrt{3}$$

と書き換えられます．先頭の1が消えるので，逆数を普通にとれるところが大事です．なお $X_n=2$ のときの

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}\leqq 2+\frac{1}{Y_{n-1}}$$

については，先頭の項が打ち消し合わず逆数をとるのが困難と思うかもしれませんが，この場合，不等式の成立は自明なので，これ以降，考えなくてよいケースでしたね．

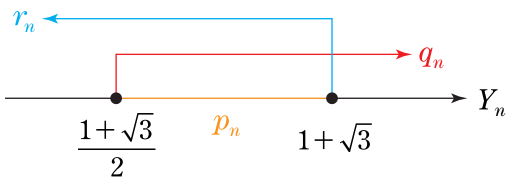
《補足 2》

q_k, r_k を設定したときに

求める確率 p_n は

「q_n の状況」かつ「r_n の状況」だ！

と考えた人も多いと思います．実際それは正しく，そこに，確率漸化式での定番の「和が 1」を絡めることにより上手くいきます．p_n, q_n, r_n の対応状況は下図の通りです．



「q_n の状況」または「r_n の状況」で全ての状況を網羅し，p_n がその 2 つの重複部分に相当するので

$$q_n + r_n - p_n = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立ちます．一方で，解答でも利用した

$$p_{n+1} = \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{6}r_n \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立ちます．

$$① \iff q_n + r_n = 1 + p_n$$

より，② に代入して

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{6}(q_n + r_n) \\ &= \frac{1}{6}(1 + p_n) \\ &= \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となり，解答で導いた漸化式がもっとお手軽に導けます．さらに，q_{n-1} と r_{n-1} を用いないので，$n \geqq 2$ とする必要もなく，より楽ですね．

《補足 3》

連分数展開の形を全面に押し出して解答するとどうなるでしょうか？

過去 2 回の原稿の中で紹介していなかったですが，分子を必ず 1 とする正則連分数展開について，重要なのは，各分数の左下に登場する数だけなので，そこに注目して

$$\begin{aligned} 1+\sqrt{3} &= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} \\ &= [2\,;1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ \cdots\cdots] \end{aligned}$$

と表したりもします．同様に

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} = [1\,;2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots]$$

です．今回の Y_n であれば

$$Y_n = \left[X_n\,;X_{n-1},\ X_{n-2},\ X_{n-3},\ \cdots\cdots,\ X_1\right]$$

です．これより，与えられた条件

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$$

は

$$\begin{aligned} &[1\,;2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots] \\ &\quad \leqq \left[X_n\,;X_{n-1},\ X_{n-2},\ X_{n-3},\ \cdots\cdots,\ X_1\right] \\ &\qquad \leqq [2\,;1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ \cdots\cdots] \end{aligned}$$

と書き換えることができます．

さて，では，これを満たすような $(X_n,\ X_{n-1},\ \cdots\cdots,\ X_1)$ の組とはどのようなものでしょうか？

数字の見比べ合いにより，数字の並びが上手いこと決められそうな気もしますが，実はそんなに甘くないです．

そのためにまず不等式なので，扱う数と元の数の大小について一般的に確認しておきます．2 つの数

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots\cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

および

$$\beta = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cdots\cdots + \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{1}{b_n}}}}}$$

について

$$a_0 > b_0 \quad \Rightarrow \quad \alpha > \beta$$

が成り立ちます．a_0，b_0 はそれぞれの整数部分を表すので当然です．

では，$a_0 = b_0$ のときはどうでしょうか？次の a_1，b_1 の大小が大事になり

$$a_1 > b_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha < \beta$$

となります．a_1，b_1 は分母の整数部分なので，これが大きいほど，数としては小さくなります．

さらに

$$a_0 = b_0 \text{ かつ } a_1 = b_1$$

のときはどうでしょうか？実は

$$a_2 > b_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha > \beta$$

です．今度は，大小関係がそのままになります．

最初 2 つまでが同じである簡単な具体例としては

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} < 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}$$

つまり

$$[1\,;2,\ 2] < [1\,;2,\ 3]$$

などがあります．確かに，右の数の方が大きいですね．

これは，一般に

　　分母が大きくなるほど，分数は小さくなる

　　分子が大きくなるほど，分数は大きくなる

ことが成り立つ中で，a_2，b_2 については，分母の分数における分母になるので，実質，分子のようなもの，と捉えると納得がいくのではないでしょうか？

一般論としては，左から順に見ていき，初めて対応する数同士が異なる数になる場合について

・それが奇数番目の数であるときは，その数が大きい方が「大きい」(大小関係同じ)

・それが偶数番目の数であるときは，その数が大きい方が「小さい」(大小関係逆)

となると言えます．

それを踏まえて，$n = 8$ のときを考えてみましょう．$(X_8,\ X_7,\ X_6,\ X_5,\ X_4,\ X_3,\ X_2,\ X_1)$ の組を考えることになります．左から数字を決めていくとして，まずは $X_8 = 1$ とします．このときは上から押さえる不等式は必要なかったので

$$\begin{aligned}&[1\,;2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots]\\ &\qquad \leqq [1\,;X_7,\ X_6,\ X_5,\ X_4,\ X_3,\ X_2,\ X_1]\end{aligned}$$

を考えればよいわけです．左から見て順に同じ数字が対応しているとして，偶数番目に対応する数 2 を下回る 1 となれば，以下 *free* です．あるいは，奇数番目で対応する数である 1 を上回る 2～6 が出れば，以下 *free* です．

そのことに注意して，該当する数字の組を書き出すと，下のようになります．

$$\begin{aligned}&(X_8,\ X_7,\ X_6,\ X_5,\ X_4,\ X_3,\ X_2,\ X_1)\\ &= (1,\ 1,\ *,\ *,\ *,\ *,\ *,\ *)\\ &\quad (1,\ 2,\ 2\sim 6,\ *,\ *,\ *,\ *,\ *)\\ &\quad (1,\ 2,\ 1,\ 1,\ *,\ *,\ *,\ *)\\ &\quad (1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2\sim 6,\ *,\ *,\ *)\\ &\quad (1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ *,\ *)\\ &\quad (1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2\sim 6,\ *)\\ &\quad (1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1 \text{ or } 2)\end{aligned}$$

($*$ は *free*)

一番下の場合について，最後の X_1（偶数番目）は 1 のときと 2 のときとを区別する必要がないので，まとめています．

これより，該当する場合の数は

$$6^6 + 5 \cdot 6^5 + 6^4 + 5 \cdot 6^3 + 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 2 \text{ (通り)}$$

となります．

次に，$X_8=2$ の場合を考えます．下からの不等式は不要なので，上からの不等式だけでよく

$$\begin{aligned}&[2\,;X_7,\ X_6,\ X_5,\ X_4,\ X_3,\ X_2,\ X_1]\\&\quad\leqq[2\,;1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ \cdots\cdots]\end{aligned}$$

について，偶数番目は $2\sim6$ で以下 $free$， 奇数番目は 1 で以下 $free$ となります．よって次のようになります．

$$\begin{aligned}&(X_8,\ X_7,\ X_6,\ X_5,\ X_4,\ X_3,\ X_2,\ X_1)\\&=(2,\ 2\sim6,\ *,\ *,\ *,\ *,\ *,\ *)\\&\quad(2,\ 1,\ 1,\ *,\ *,\ *,\ *,\ *)\\&\quad(2,\ 1,\ 2,\ 2\sim6,\ *,\ *,\ *,\ *)\\&\quad(2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ *,\ *,\ *)\\&\quad(2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2\sim6,\ *,\ *)\\&\quad(2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ *)\\&\quad(2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2\sim6)\end{aligned}$$

一番下の場合について

$$(2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1)$$

も適切だと思うかもしれませんが，これは不適です．

$$1+\sqrt{3}=[2\,;1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ \cdots\cdots]$$

について，Y_8 と違いこちらはエンドレスで続いていくものなので，9 番目の数があり，これの関係で

$$\begin{aligned}&[2\,;1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1]\\&\quad>[2\,;1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ \cdots\cdots]\end{aligned}$$

となるからです．具体的には

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}}}}}$$

$$>2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}$$

です．最後の分数の分母が，分数全体で見ても分母に相当することから分かります．

よって，該当する場合の数は全部で

$$5\cdot6^6+6^5+5\cdot6^4+6^3+5\cdot6^2+6^1+5\ \text{（通り）}$$

となります．

合計すると

$$\begin{aligned}&6\cdot6^6+6\cdot6^5+6\cdot6^4+6\cdot6^3\\&\qquad\qquad+6\cdot6^2+6\cdot6^1+7\\&=6^7+6^6+6^5+6^4+6^3+6^2+6+1\\&=\frac{6^8-1}{6-1}\\&=\frac{6^8-1}{5}\end{aligned}$$

通りとなります．あとは，全事象の場合の数である 6^8 通りで割ることにより，求める確率は

$$\frac{\frac{6^8-1}{5}}{6^8}=\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^8\right\}$$

です．解答で求めた式において $n=8$ としたものと，確かに合致していますね．

余力がある人は，一般の n で求めてみてください．実は左のように列挙する場合，書き出す最後の「場合」の解釈が n の偶奇で変わってきます．思考力を要すると思いますが，いい訓練になると思います．

また，「場合」を列挙するところにおいて，並びが結局のところ「繰り返しである」ことに気付けたら

漸化式を利用するのが楽そう

という発想に繋ぐこともできます．

《おわりに》

今年度の私からの出題は以上です．3 回とも連分数展開をテーマにした問題を取り上げてみました．今回の問題は 2012 年の京都大学理系の問題です．連分数展開が背景になっている問題が著名な大学での出題にも散見されるので，しっかりマスターしておきたいですね．

（研伸館　野口）