

強者の戦略

強者サイトをご覧になっている皆さん、こんにちは。数学科の中西です。

春になり、過ごしやすい季節になりました。桜並木を見ているだけで、心がほっこりして、嬉しい気持ちになってきますが、皆さんは学校の新年度の準備などで、忙しい時間を過ごしていることと思います。

さて今回は、簡単な問題なのですが是非考えてみて欲しい入試問題を見つけましたので、出題したいと思います。これから強者にならんとしている高1、高2生に向けての問題、ということになると思います。高3生は通学途中の電車の中とかお風呂の中でも、頭の体操がわりに考えてもらえれば、と思います。

それでは、問題です。

問題

ある2次方程式 $f(x)=0$ の解の1つが $\alpha = s+t\sqrt{2}$ (s, t は有理数) であった。このとき、もう一つの解 β に関する次の議論は正しいか、正しくないか。理由をつけて、説明しなさい。

$\alpha = s+t\sqrt{2}$ から簡単な計算により、

$$\alpha^2 - 2s\alpha + s^2 - 2t^2 = 0$$

を得る。これは、 α が

$$x^2 - 2sx + s^2 - 2t^2 = 0$$

の解であることを意味することから、

$$f(x) = x^2 - 2sx + s^2 - 2t^2$$

がわかる。よって、 $f(x)=0$ のもう一つの解 β は $x^2 - 2sx + s^2 - 2t^2 = 0$ を解いて

$$\beta = s - t\sqrt{2}$$

と求まる。

元々の入試問題から少しだけ誘導を削っていますが、それでも理系で高2以上、文系で高3の方にとっては簡単な問題だと思います。ですので、解けてしまった方は

「正しい」と答えた人 → $f(x)$ にどのような条件がつくと、 β の値が正しくなくなるか

「正しくない」と答えた人 → $f(x)$ にどのような条件がつくと、 β の値が正しくなるか

ということについても、考えてみてください。

それでは、解答編でお待ちしています。