強者の戦略

今回の問題はシンプルですので，さっそく問題を確認してみましょう．

> 問題
>
> ある 2 次方程式 $f(x)=0$ の解の 1 つが $\alpha=s+t\sqrt{2}$（s，t は有理数）であった．このとき，もう一つの解 β に関する次の議論は正しいか，正しくないか．理由をつけて，説明しなさい．
>
> > $\alpha=s+t\sqrt{2}$ から簡単な計算により，
> > $$\alpha^2-2s\alpha+s^2-2t^2=0$$
> > を得る．これは，α が
> > $$x^2-2sx+s^2-2t^2=0$$
> > の解であることを意味することから，
> > $$f(x)=x^2-2sx+s^2-2t^2$$
> > がわかる．よって，$f(x)=0$ のもう一つの解 β は $x^2-2sx+s^2-2t^2=0$ を解いて
> > $$\beta=s-t\sqrt{2}$$
> > と求まる．

まずは問題に答えるだけなら簡単なので，さくっと解答を紹介しておきます．

［解答］

結論：正しくない．

理由：以下に問題の議論にそぐわない $f(x)$ の反例を挙げる．

$x=\alpha$ を解に持つ方程式の 1 つとして，$x=0$, α を解に持つ

$$x(x-\alpha)=0$$
$$\Longleftrightarrow\ x^2-(s+t\sqrt{2})x=0$$

が存在し，この方程式の左辺を $f(x)$ と考えることができる．他にも，$x=\alpha$ でない方の解を変えれば，いくらでも問題文の条件に合う $f(x)$ を作ることができる．

よって

$$f(x)=x^2-2sx+s^2-2t^2$$

と断定することはできず，$f(x)=0$ のもう 1 つの解が β になるとは限らない．

（理由終）

《解説》

正しくないことに気づけば，反例を挙げて一瞬で解答できます．高 1 生の場合は，今まで 2 次方程式を解いた際の記憶に，簡単な因数分解か解の公式で解いたものしか残っていないと，$\alpha=s+t\sqrt{2}$ の見た目に騙されて「解の公式を使って出てきた答えに違いない！」と勘違いし，$\beta=s-t\sqrt{2}$ が正しい答えであるように思えてしまったかもしれません．

［考察 1］

ここで，問題の議論の中でどこに矛盾が生じているのか考えてみましょう．説明のために，問題文の議論の部分を以下のように 4 つのブロックに分けます．

> （ア）　$\alpha=s+t\sqrt{2}$ から簡単な計算により，
> $$\alpha^2-2s\alpha+s^2-2t^2=0$$
> を得る．
>
> （イ）　これは，α が
> $$x^2-2sx+s^2-2t^2=0$$
> の解であることを意味する
>
> （ウ）　ことから，
> $$f(x)=x^2-2sx+s^2-2t^2$$
> がわかる．
>
> （エ）　よって，$f(x)=0$ のもう一つの解 β は
> $x^2-2sx+s^2-2t^2=0$ を解いて
> $$\beta=s-t\sqrt{2}$$
> と求まる．

以下，1 つずつ確認してみましょう．

（ア）　$\alpha=s+t\sqrt{2}$ から簡単な計算により，

$$\alpha^2-2s\alpha+s^2-2t^2=0 \quad \cdots\cdots①$$

を得る．

2 乗計算が入るため，微妙に怪しいのですが

$$\alpha=s+t\sqrt{2}$$
$$\iff \alpha-s=t\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow (\alpha-s)^2=(\sqrt{2}t)^2$$
$$\iff \alpha^2-2s\alpha+s^2-2t^2=0$$

という計算で，① を得ることができます．2 乗計算の部分が同値変形ではないことに，一応注意しておきましょう．

（イ）　これ（①）は，α が

$$x^2-2sx+s^2-2t^2=0 \quad \cdots\cdots②$$

の解であることを意味する

ここは正しいです．方程式の解の定義は「等式に代入したときに，その等号を成立させる値」であり，実際 ② に $x=\alpha$ を代入すれば ① となるので，これは成り立っています．

（ウ）（α が ② の解であることを意味する）ことから，

$$f(x)=x^2-2sx+s^2-2t^2$$

がわかる．

先ほど紹介した解答の反例から，ここが正しくない，ということがわかります．$x=\alpha$ を解に持つような 2 次方程式はいくつでも作ることができますから，問題の $f(x)=0$ と ② が同じ 2 次方程式を表しているとは限りません．（ア）の 2 乗計算の際に

$$\alpha-s=-t\sqrt{2}$$

の場合も含んでしまうことで同値性が崩れていることに気づいていると，（ウ）の部分が正しくないことに，より気づきやすいでしょう．

（エ）よって，$f(x)=0$ のもう 1 つの解 β は

$x^2-2sx+s^2-2t^2=0$ を解いて

$$\beta=s-t\sqrt{2}$$

と求まる．

（ウ）の部分が正しければ，s，t が有理数であることから，$f(x)=0$ が実数係数の 2 次方程式なので，β の値も正しくなりますが，今回は（ウ）の段階で正しくないため，（エ）の部分が意味をなさなくなっています．

以上から，この問題の議論では特に（ウ）の部分に問題があることがわかります．反例を挙げて問題を解くだけなら必要のない分析ですが，自分の答案を模範解答例と見比べて，どこで間違っているのかを判断するときなどに，このように分析する力は役に立ちます．加えて，2 乗計算や，方程式の解の定義など，普段何気なく使っていることに関して，少しだけ踏み込んで，正しい使い方や意味を知っておくと，証明問題では有利になります．

[考察 2]

次に，今回の問題で $f(x)$ にどのような条件がつけば β の値がもう 1 つの解として正しくなるのか，について考えてみましょう．

皆さんの記憶を遡ってみても，実数係数の 2 次方程式で $s+t\sqrt{2}$ を解に持てば $s-t\sqrt{2}$ も解に持つ経験のほうが多いはずで，もしかしたら皆さんが解いている 2 次方程式には何か偏りがあり，偏ったものばかり解いているせいで，今回の議論のような勘違いが起こっているのかもしれません．その偏りを探ってみましょう．

以下，実数係数の 2 次方程式の話に限定します．2 次方程式 $f(x)=0$ を，a を 0 でない数として

$$f(x)=ax^2+bx+c=0 \quad \cdots\cdots③$$

とおき，③ の解を求めてみましょう．③ を変形していくと

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+c=0$$
$$\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Longleftrightarrow\ x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}\quad\cdots\cdots(*)$$

$$\therefore\ \ x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\cdots\cdots④$$

となります．ちなみに，$(*)$ の行から ④ の行への変形では，仮に a が負の数であっても，$\pm$ が $\mp$ に変わるだけなので，結局同じ 2 数になることを用いています．

ここで ④ から，$\alpha=s+t\sqrt{2}$ の $\sqrt{2}$ の部分が，$\sqrt{b^2-4ac}$ の部分以外も関わって計算されていると，$\beta=s-t\sqrt{2}$ も解に持つとは言えなさそうです．以下，いくつか具体例を見てみましょう．

(i)　$-\dfrac{b}{2a}$ の部分から $\sqrt{2}$ が出てくるもの

$$x^2-2\sqrt{2}x-7=0$$

を解くと

$$\begin{aligned}x&=\sqrt{2}\pm\sqrt{2+7}\\&=\pm3+\sqrt{2}\end{aligned}$$

となり，$s+t\sqrt{2}$ を解に持つとき，$s-t\sqrt{2}$ ではなく $-s+t\sqrt{2}$ を解に持つ．

(ii)　c の部分のみ，無理数を含むもの

$$x^2+3x-\sqrt{2}=0$$

を解くと

$$\begin{aligned}x&=\frac{-3\pm\sqrt{9+4\sqrt{2}}}{2}\\&=\frac{-3\pm\sqrt{9+2\sqrt{8}}}{2}\\&=\frac{-3\pm(2\sqrt{2}+1)}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore\ x=-1+\sqrt{2},\ -2-\sqrt{2}$$

となり，$s+t\sqrt{2}$ を解に持っても $s-t\sqrt{2}$ を解に持たない．

最初の解答で挙げた反例以外にも，(i) や (ii) のような例もあるわけですが，ここで逆に考えてみると

- $\sqrt{b^2-4ac}$ の部分以外からは $\sqrt{2}$ の部分が出てこない
- $\sqrt{b^2-4ac}$ の部分が 2 重根号になることで $\sqrt{2}$ の部分以外の余計なものが出てくる，ということがない

という 2 つの条件を満たせば，すなわち

　　係数の a，b，c がすべて有理数

であれば，$s+t\sqrt{2}$ を解に持てば $s-t\sqrt{2}$ も解に持つと言えそうです．続いて，この予想を証明してみましょう．

（示したいこと）

s，t を有理数，a を 0 でない数として

$$f(x)=ax^2+bx+c=0\quad\cdots\cdots③$$

において，a，b，c がすべて有理数であるとき，③ が $s+t\sqrt{2}$ を解に持つならば $s-t\sqrt{2}$ も解に持つ．

[証明]

a，b，c が有理数のとき，③ の両辺を a で割って

$$x^2+kx+l=0\ (k,\ l\text{ は有理数})\quad\cdots\cdots④$$

と変形できる．$x=s+t\sqrt{2}$ を ④ に代入して

$$\begin{aligned}&(s+t\sqrt{2})^2+k(s+t\sqrt{2})+l=0\\\Longleftrightarrow\ &(s^2+2t^2+sk+l)+(2st+tk)\sqrt{2}=0\end{aligned}$$

となる．ここで，s^2+2t^2+sk+l，$2st+tk$ は有理数なので，$\sqrt{2}$ が無理数であることより

$$s^2+2t^2+sk+l=0\quad\cdots\cdots⑤$$

$$2st+tk=0\quad\cdots\cdots⑥$$

となる．⑥ より

$$t(2s+k)=0$$

で，$t=0$ のとき $s+t\sqrt{2}=s-t\sqrt{2}$ より示される．

次に，$k=-2s$ のとき，⑤ より

$$\begin{aligned}l&=-s^2-2t^2-s(-2s)\\&=s^2-2t^2\end{aligned}$$

であるから，④ に代入して

$$x^2-2sx+(s^2-2t^2)=0$$

となる．実数係数の 2 次方程式なので，解の公式より

$$\begin{aligned} x &= s\pm\sqrt{s^2-(s^2-2t^2)} \\ &= s\pm\sqrt{2}|t| \\ &= s\pm\sqrt{2}t \end{aligned}$$

となるので，④ つまり ③ は $s-t\sqrt{2}$ も解に持つ．

以上より，示された．

（証明終）

以上から，$f(x)=0$ が有理数係数の 2 次方程式であれば，$\alpha=s+t\sqrt{2}$ を解に持つとき $\beta=s-t\sqrt{2}$ も解に持つと示せました．ただ，問題の議論の文章においては，仮に $f(x)$ の係数が有理数であったとしても（ウ）の部分の説明が不十分なので，議論すべてが完璧に正しくなる！というわけではないことに注意しましょう．

《補足 1》

さて，［考察 2］において，③ を実数係数の 2 次方程式に限定しました．今回出題した問題だけならば，$x=\alpha$ と $x=i$ を解にもつときの $f(x)$ などを考えれば複素数係数の反例も作ることができ，特に実数係数に限る必要はないのですが，［考察 2］においては ④ の 1 行手前の $(*)$ の式で問題が生じます．もしも a，b，c の中に虚数があったとすると，$(*)$ の根号の中に i が残るかもしれませんが，これはいけません．高校数学では $\sqrt{i}$ を考えることはできないからです．よって，複素数係数の 2 次方程式においては解の公式も使えないことになります．

《補足 2》

今回のテーマとよく似た知識として，実数係数の 2 次方程式であるならば，複素数 γ を解に持つとき，共役複素数の $\overline{\gamma}$ も解に持つ，というものがあります．これは，数学Ⅲの「複素数平面」で扱う公式を用いれば，以下のように簡単に示すことができます．

（示したいこと）

γ を複素数，a を 0 でない数として

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots\cdots ⑦$$

において，a，b，c がすべて実数であるとき，⑦ が γ を解に持つならば $\overline{\gamma}$ も解に持つ．

［証明］

$x=\gamma$ を ⑦ に代入して

$$a\gamma^2+b\gamma+c=0$$

が成り立つ．両辺で共役複素数を考えると

$$\begin{aligned} & \overline{a\gamma^2+b\gamma+c}=0 \\ \Longleftrightarrow\ & \overline{a\gamma^2}+\overline{b\gamma}+\overline{c}=0 \\ \Longleftrightarrow\ & \overline{a}\cdot\overline{\gamma}\cdot\overline{\gamma}+\overline{b}\cdot\overline{\gamma}+\overline{c}=0 \\ \Longleftrightarrow\ & a\overline{\gamma}^2+b\overline{\gamma}+c=0 \end{aligned}$$

となる．これは, $x=\overline{\gamma}$ も ⑦ の解であることを表す．

以上より，示された．

（証明終）

研伸館の授業においては,《補足 1》は「高 3 数学トップレベル［文系］」の 3 月期の授業にて,《補足 2》は春期講習の「高 2 数学 S［数 III：複素数平面］」の授業で扱った内容と繋がりがあります．受講していた方は，これを機会に一度，授業内容を振り返ってみてはどうでしょうか．

（数学科　中西）