強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第 1 問（数 IAIIB）

等式

$$p^q = q^p + 7$$

を満たす素数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

＜解答＞

$$p^q = q^p + 7 \quad \cdots\cdots ①$$

において，p^q と q^p の偶奇は異なるので，p，q のいずれか一方は偶数の素数，すなわち 2 であり，もう一方は奇素数である．

・$p=2$，q が奇素数のとき

① は

$$2^q = q^2 + 7 \quad \cdots\cdots ②$$

となる．

ここで，6 以上の自然数に対して

$$2^n > n^2 + 7 \quad \cdots\cdots (*)$$

であることを数学的帰納法で示す．

(i)　$n=6$ のとき

$$2^6 = 64$$

$$6^2 + 7 = 43$$

より，$(*)$ は成立する．

(ii)　$n=k\ (\geqq 6)$ のとき

$$2^k > k^2 + 7$$

と仮定する．すると

$$\begin{aligned}
&2^{k+1} - \{(k+1)^2 + 7\} \\
&= 2 \cdot 2^k - (k^2 + 2k + 8) \\
&> 2(k^2 + 7) - (k^2 + 2k + 8) \\
&= (k-1)^2 + 5 \\
&> 0
\end{aligned}$$

となることから

$$2^{k+1} > (k+1)^2 + 7$$

となり，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

以上 (i)，(ii) より，6 以上の自然数に対して $(*)$ が示された．

すると，② を満たす奇素数 q の候補は $q=3$ または 5 に限られる．

$q=3$ のとき

$$2^3 = 8,\ 3^2 + 7 = 16$$

より ② は不成立である．

$q=5$ のとき

$$2^5 = 32,\ 5^2 + 7 = 32$$

より ② は成立する．

よって，② を満たす奇素数 q は

$$q = 5$$

である．

・$q=2$，p が奇素数のとき

① は

$$\begin{aligned}
&p^2 = 2^p + 7 \\
\iff\ &2^p = p^2 - 7 \quad \cdots\cdots ③
\end{aligned}$$

となる．

$$p^2 + 7 > p^2 - 7$$

と，$(*)$ より ③ は $p \geqq 6$ では成立せず，③ を満たす奇素数 p の候補は $p=3$ または 5 に限られる．

$p=3$ のとき

$$2^3 = 8,\ 3^2 - 7 = 1$$

より ③ は不成立である．

$p=5$ のとき

$$2^5 = 32,\ 5^2 - 7 = 18$$

より ③ は不成立である．

よって，③ を満たす奇素数 p は存在しない．

以上より

$$(p,\ q) = (2,\ 5)$$

である．

＜コメント＞

数学科の川﨑です．今年度もこのページを担当します．どうぞよろしくお願いします．

今回は，今年度の入試問題から，整数問題を出題しました．教育課程が変わり，本格的に出題されるようになってきましたので，強者を目指す皆さんは

対策を怠らないようにしましょう．

よく，「整数問題は様々なパターンがあって嫌いだ」なんて声を耳にしますが，逆にそれが数学の醍醐味です．あれこれと試行錯誤し，解答まで辿り着くプロセスを論理的に考える，この作業の繰り返しで人は賢くなっていきます（と私は思います）．この思考訓練の題材として，整数問題はうってつけの問題です．

と，大好きな整数問題について熱く語るのはこれくらいにして本題に入ります．今回の問題は今年度に東北大学の理系で出題された問題で，小問 (1)，(2) に分かれていたもののうち，(2) のみを出題しました．(1) は解答中の $(*)$ を数学的帰納法で示せ，というものです．これがあれば，非常に取り組みやすい問題なのですが，少し意地悪をして，そこを考えさせるようにしました．

解答の方針を見ていきましょう．与えられた条件式は

$$p^q = q^p + 7$$

の 1 つだけですので，この式をどうにかするしかありません．右辺の 7 と p，q が素数であることが手がかりです．因数分解や不等式の作成などがこの形では厳しいですので

「剰余で分類」

という手法をとりましょう．すなわち，両辺を何かで割った余りに着目するのです．2 や 3 など，小さい数で実験しますね．すると，2 で割った余りに着目したとき，p^q と q^p の偶奇が異なることに気付きます．これが大きいのです．

「素数で偶数のものは 2 だけ」

ですので，p，q のどちらかは 2 と決まり，2 文字ある変数を 1 文字に減らすことができます．ここまでがまず第 1 段階です．

次に，解答中の ②，③ の式を考えます．すると例えば ② の式で，次のような表を作るとやるべきことが見えてくるのではないでしょうか．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512
n^2+7	8	11	16	23	32	43	56	71	88

n が小さいうちは 2^n の方が大きいのですが，$n \geqq 6$ では 2^n の方が大きくなりそうです．一度，2^n の方が大きくなれば，あとは 2^n に n^2+7 は追いつけませんね．解答ではこの部分を帰納法で示しました．

さて，出題時にも書きましたが，このページでの私の担当は数Ⅲです．ここまで，一切数Ⅲの内容を使わずにきましたが，それでは怒られそうですので数Ⅲの微分法を使って，解答中の $(*)$ を示してみたいと思います．以下の＜ $(*)$ の別証 ① ＞の部分は，文系の人は読み飛ばしてください．

＜ $(*)$ の別証 ① ＞

6 以上の実数 x に対して

$$2^x > x^2 + 7$$

であることを示す．

$$f(x) = 2^x - (x^2+7)$$

とおくと

$$f'(x) = 2^x \log 2 - 2x$$
$$f''(x) = 2^x (\log 2)^2 - 2$$

である．

ここで

$$e < 4$$

より，両辺の自然対数をとって

$$1 < 2\log 2 \iff \frac{1}{2} < \log 2$$

であるから，$x \geqq 6$ において

$$f''(x) > 2^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 > 0$$

となり，$f'(x)$ は単調に増加する．

すると，$x \geqq 6$ において

$$\begin{aligned} f'(x) &> f'(6) \\ &= 2^6 \log 2 - 12 \\ &> 2^6 \cdot \frac{1}{2} - 12 \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから，$f(x)$ も単調に増加する．

よって，$x \geqq 6$ で

$$f(x)>f(6)=21>0$$

であるから

$$2^x>x^2+7$$

となることが示された．

特に，$x=n$ (n は自然数) のときを考えて，$n \geqq 6$ のとき

$$2^n>n^2+7$$

が成り立つ．

＜(∗) の別証 ① 終＞

上の証明は，微分法にもちこむために，変数を自然数の n ではなく，実数 x に変えました．数列のままでは微分できませんので注意してください．

$f(x)$ を設定し，微分して，符号を調べるというのが不等式の証明での常套手段です．ただし，今回の場合は，$f'(x)$ の符号がすぐには分かりませんので，$f''(x)$ まで計算して，そこから $f'(x)$ の符号を調べ $f(x)$ が正であることを導きました．

さらに，(∗) に関しては (ややテクニカルですが) 次のように二項定理 (＋数Ⅱの微分) を用いても示すことができます．こちらは文系の人も安心して読んでください．

＜(∗) の別証 ②＞

$n=6$ のときは

$$2^6=64$$

$$6^2+7=43$$

より，(∗) は成立するので，$n \geqq 7$ のときを示す．

$n \geqq 7$ のとき，二項定理から

$$\begin{aligned}2^n &=(1+1)^n\\ &>{}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3\\ &=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\\ &=\frac{n^3+5n+6}{6}\end{aligned}$$

が成り立ち

$$\frac{n^3+5n+6}{6}-(n^2+7)=\frac{n^3-6n^2+5n-36}{6} \quad \cdots\cdots (**)$$

である．

ここで

$$g(x)=x^3-6x^2+5x-36$$

とおくと，$x \geqq 7$ で

$$\begin{aligned}g'(x)&=3x^2-12x+5\\ &=3(x-2)^2-7\end{aligned}$$

は単調増加であるから

$$g'(x) \geqq g'(7)=68>0$$

である．よって，$g(x)$ も $x \geqq 7$ で単調増加であるから

$$g(x) \geqq g(7)=48>0$$

である．

これと (∗∗) より，$n \geqq 7$ で

$$2^n>\frac{n^3+5n+6}{6}>n^2+7$$

となり，(∗) は成り立つ．

＜(∗) の別証 ② 終＞

この証明のポイントは，二項定理で，2^n を 3 次式でいったん評価するところです．右辺が n の 2 次式ですので，それより高次の項をもってくれば，n が大きくなったとき左辺の方が大きくなれることが言えるはずです．もちろん ${}_n\mathrm{C}_4$，${}_n\mathrm{C}_5$ など，より高次の項を持ち出してもいいのですが，その分計算は大変になります．今回は ($n=6$ のところだけ別にやらないといけなくなりましたが) 3 次で事足りましたので上のような証明にしています．

この問題は，少し手を動かせば答えの

$$(p,\ q)=(2,\ 5)$$

は見つかると思います．問題は「他には無いこと」の論証の部分で，(∗) が本質的です．これがきちんとできていない答案は高得点が望めないということに注意してください．答えが出たから OK というのは，数学では許されません (答えが予想できること

は，もちろん大事ですが…).

それでは，類題を紹介しておきます．是非チャレンジしてみてください．

> **問**
>
> n を 4 以上の自然数とする．数 2，12，1331 がすべて n 進法で表記されているとして，$2^{12}=1331$ が成り立っている．このとき n はいくつか，十進法で答えよ．

＜解答＞

$n \geqq 4$ に注意すると

$$2_{(n)}=2_{(10)}$$

$$12_{(n)}=n+2_{(10)}$$

$$1331_{(n)}=n^3+3n^2+3n+1_{(10)}$$

である．

よって，与式を十進数表記すると

$$2^{n+2}=n^3+3n^2+3n+1$$

$$\iff \quad 2^{n+2}=(n+1)^3 \quad \cdots\cdots ①$$

となる．

すると

$$n+1=2^k$$

$$\iff \quad n=2^k-1 \quad (n \geqq 4 \text{ より } k \text{ は } 3 \text{ 以上の自然数})$$

とおけて

$$① \quad \iff \quad 2^{2^k+1}=2^{3k}$$

$$\iff \quad 2^k+1=3k \quad \cdots\cdots ②$$

となる．

ここで，k が 4 以上のとき

$$2^k+1>3k \quad \cdots\cdots (*)$$

となることを数学的帰納法で示す．

(i)　$k=4$ のとき

$$2^4+1\,(=17)>3\cdot 4\,(=12)$$

より成立する．

(ii)　$k=l\,(\geqq 4)$ のとき

$$2^l+1>3l \quad \iff \quad 2^l>3l-1$$

が成り立つと仮定する．

このとき

$$\begin{aligned} 2^{l+1}+1-3(l+1) &> 2(3l-1)+1-3(l+1) \\ &> 3l-4 \\ &> 0 \quad (\because \quad l \geqq 4) \end{aligned}$$

であるから

$$2^{l+1}+1>3(l+1)$$

となり，$k=l+1$ のときも $(*)$ は成立する．

以上 (i)，(ii) より，4 以上のすべての自然数 k で $(*)$ が成立することが示された．

すると，② を満たす k の候補は $k=3$ に限られ，$k=3$ のとき，たしかに ② は成り立つ．

よって，求める n の値は

$$n=2^3-1=7$$

である．

＜解答終＞

いかがだったでしょうか．n 進数の設定にびっくりしますが，落ち着いて十進数に直せば，① まではいけるはずです．ここで，左辺に着目して，$n+1$ が素因数に 2 しかもたないことに気付けば，② が導けます．あとは，今回出題の東北大学の問題と同様に，ある程度 k が大きくなると，2^k+1 のほうが $3k$ よりも大きいということを示せば答えに辿り着けます．この証明においても，先程述べた数Ⅲの微分や二項定理でどうなるか，を考えることはできますので，余裕のある人は取り組んでみてください．

これは，今年京都大学の文系で出題された問題です．ぱっと見，設定は違うのですが，最後のテーマ

「2 の冪は k 次式より大きくなる」

は共通しています．

実は，私が最初に今回出題の東北大学の問題を見た時に，「あれ？同じ問題？」と思った問題は，京大の文系ではなく，理系の方の問題でした．そちらもついでに見てみましょう．

> **問**
>
> 素数 p，q を用いて p^q+q^p と表される素数をすべて求めよ．

強者の戦略

＜解答＞

p，q が素数であるとき

$$p^q+q^p \geqq 2^2+2^2=8 \quad \cdots\cdots (*)$$

であるから，p^q+q^p が素数であれば，それは奇素数であり，これより p^q と q^p の偶奇は異なるので p，q のうち一方は2，もう一方は奇素数である．

対称性より

$$p=2,\ q:\text{奇素数}$$

としてよい．

すると

$$p^q+q^p=2^q+q^2$$

であり，$q=3$ のとき

$$2^3+3^2=17$$

となるので，これは素数である．

以下，$q \geqq 5$ とする．このとき，q は3の倍数ではないので

$$q \equiv 1,\ 2 \pmod 3$$

であり

$$q^2 \equiv 1 \pmod 3$$

となる．さらに，q は奇数であるから

$$2^q \equiv (-1)^q \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3$$

である．したがって

$$2^q+q^2 \equiv 2+1 \equiv 0 \pmod 3$$

となり，2^q+q^2 は3の倍数で，さらに $(*)$ より3より大きいので素数にはなりえない．

以上より，求める素数は

$$17 \quad ((p,\ q)=(2,\ 3) \text{ または } (3,\ 2) \text{ のとき })$$

である．

＜解答終＞

この問題，見た目は東北大学の問題とよく似ているのですが，後半のテーマが違いますね．実際 q を $q=3$，5，7 としてみて，$q \geqq 5$ のとき 2^q+q^2 が3の倍数になる (かつ3より大きい) ので素数にならないということに気付くかどうかの勝負です．実際，今年の京都大学の受験当日，試験終了後に「あんなん実験したら3の倍数って分かるやん」という生の受験生の声を聞き，感心したのを覚えています．皆さんもそういう強者に近づけるよう頑張ってください．

それでは今回はここまでにしたいと思います．また次回．

（数学科　川﨑）