強者の戦略

数学科の西村です．今回の問題はいかがだったでしょうか．今回出題した問題は今年の東京慈恵会医科大学で出題された問題（一部改変）です．パラメータで表された曲線についての本格的な微積分の問題ですし，慣れていないとなかなか難しいと思います．この手の問題の解法を解説していきますので，できなかった人は，参考にしていただければと思います．では早速解答といきましょう．

問

xy 平面上において，半径 2 の円板が x 軸に接しながら正の方向にすべることなく回転するとき，円板上の定点 P が描く曲線 C_1 を考える．時刻 $t=0$ における円板の中心 D の位置を点 $(0,\ 2)$，P の位置を点 $(0,\ 1)$ とする．時刻 t において D が点 $(t,\ 2)$ の位置にあるように円板が回転していくとき，次の問いに答えよ．

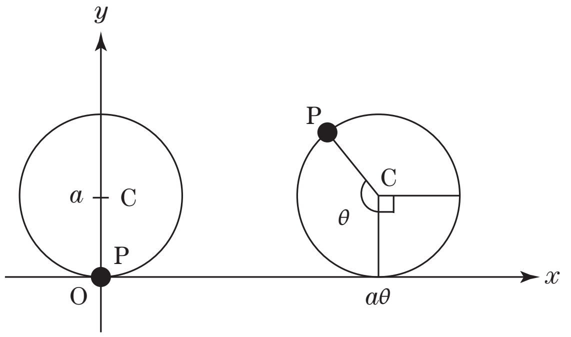
(1)　時刻 t における P の座標 $(x,\ y)$ を求めよ．

(2)　時刻 t に対応する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ における C_1 の法線 l が x 軸と交わる点を M とし，M が線分 PQ の中点となるような l 上の点を Q とする．Q の座標 $(X,\ Y)$ を求めよ．ただし，$t=0$ のときは Q を $(0,-1)$ とする．

(3)　点 Q が描く曲線を C_2 とする．2 曲線 C_1, C_2 と y 軸，および $t=3\pi$ のときの (2) における法線 l で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

《考え方》

(1)　曲線 C_1 はトロコイドと呼ばれる曲線の 1 つで，サイクロイドに関連した曲線として知られています．この手の曲線に関して，その軌跡を求めることは頻出です．サイクロイドの方程式がその基本になりますので，まずはサイクロイドの方程式を確認しましょう．



円が始めの状態から θ だけ回転したときの点 P の座標をパラメータ θ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\theta \\ a \end{pmatrix}+a\begin{pmatrix} \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a(\theta-\sin\theta) \\ a(1-\cos\theta) \end{pmatrix}$$

となります．

今回の問題もこれと同じ要領で立式できます．それに加えて，今回は「t を用いて点 P の座標を表せ」となっているので，θ を t で表す必要があります．これについては，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\mathrm{OB}$（解答の図 1）に着目しましょう．

(2)　接線や法線を求めるためには，関数を微分して傾きを求めればよいですね．(1) で C_1 がパラメータ t を用いて表されました．t を消去するのは不可能ですので x，y 別々に微分する方針になります．法線の傾きは

$-\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=-\dfrac{\dfrac{dx}{dt}}{\dfrac{dy}{dt}}$ で求まりますが，これだと $\dfrac{dy}{dt}=0$ の場合に問題があるため，場合分けが必要となるケースがあります．そこで，傾きを用いず，$ax+by+c=0$ の形で書くと y 軸に平行な直線も表せますので，こちらの方が柔軟に対応できます．接線の方向ベクトル $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ が法線と垂直なベクトルになりますので，

接点 $(x_0,\ y_0)$ における法線の方程式は $\dfrac{dx}{dt}=a$，$\dfrac{dy}{dt}=b$ とすれば $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ と表すことができます．

(3)　まずはグラフの概形を描き，グラフの上下関係と積分区間を調べましょう．立式に関して，こういったパラメータで表された曲線の場合は，一旦 x，y で立式した上で，パラメータ θ に置換して計算します．また，積分する方向（今回は x 軸方向）への変化がパラメータの変化に対して単調であるかどうかに注意する必要があります．今回は実際単調になるのですが，その確認をしてから立式しましょう．さらに，今回求める面積は少し工夫すると計算が楽になります．

《解答》

(1)

図 1

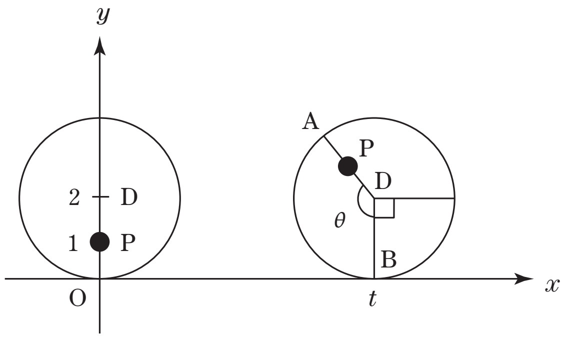


図 1 のように A，B をとり， $\angle \mathrm{ADB}=\theta$ とおくと $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\mathrm{OB}$ より，$2\theta=t$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}\\&=\begin{pmatrix}t\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}t-\sin\theta\\2-\cos\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}t-\sin\frac{t}{2}\\2-\cos\frac{t}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である．よって

$$x=t-\sin\frac{t}{2},\ y=2-\cos\frac{t}{2}$$

である．

(2)　(1) より

$$\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2},\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}$$

であるから，時刻 t に対応する点 P における法線 l の方程式は

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right)\left\{x-\left(t-\sin\frac{t}{2}\right)\right\}\\&\qquad+\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\left\{y-\left(2-\cos\frac{t}{2}\right)\right\}=0\\\iff&\left(2-\cos\frac{t}{2}\right)\left\{x-\left(t-\sin\frac{t}{2}\right)\right\}\\&\qquad+\sin\frac{t}{2}\left\{y-\left(2-\cos\frac{t}{2}\right)\right\}=0\\\iff&\left(2-\cos\frac{t}{2}\right)x+\sin\frac{t}{2}\cdot y=t\left(2-\cos\frac{t}{2}\right)\end{aligned}$$

となる．ここで，$y=0$ を代入すると

$$\begin{aligned}&\left(2-\cos\frac{t}{2}\right)x=t\left(2-\cos\frac{t}{2}\right)\\\iff&x=t\quad\left(\because 2-\cos\frac{t}{2}\neq 0\right)\end{aligned}$$

となるので，$\mathrm{M}(t,\ 0)$ である．M は線分 PQ の中点であることから

$$\begin{aligned}&\frac{x+X}{2}=t,\ \frac{y+Y}{2}=0\\\iff&X=t+\sin\frac{t}{2},\ Y=\cos\frac{t}{2}-2\end{aligned}$$

である．

(3)　(2) より $\dfrac{dx}{dt}>0$ であるから，x は t についての単調増加関数である．また，$\dfrac{dX}{dt}=1+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}>0$ であるから，X は t についての単調増加関数である．よって，曲線 C_1，C_2 の概形は次図のようになる．

図 2

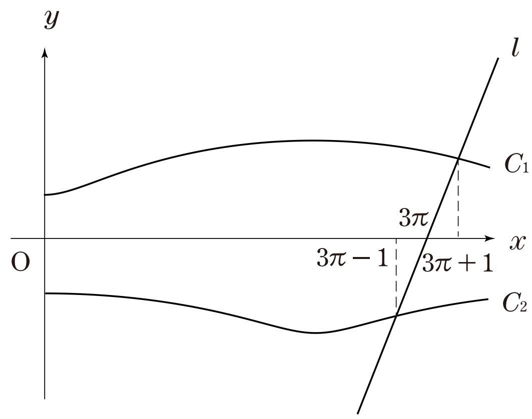


図 3

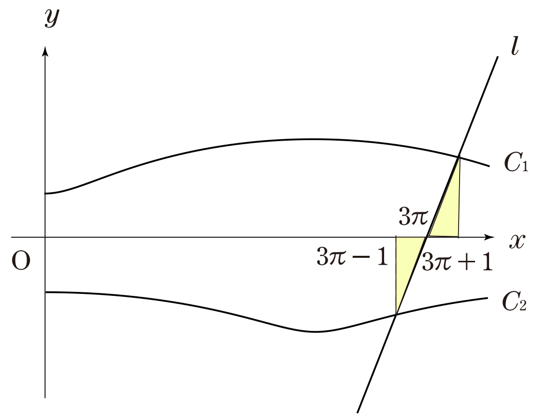


図 3 の色付きの 2 つの三角形は合同であることに着目すると，求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S&=\int_0^{3\pi+1} y\,dx+\int_0^{3\pi-1}(-Y)\,dX\\
&=\int_0^{3\pi}\left(2-\cos\frac{t}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right)dt\\
&\quad-\int_0^{3\pi}\left(\cos\frac{t}{2}-2\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right)dt\\
&=2\int_0^{3\pi}\left(2-\cos\frac{t}{2}\right)dt\\
&=2\left[2t-2\sin\frac{t}{2}\right]_0^{3\pi}\\
&=12\pi+4
\end{aligned}
$$

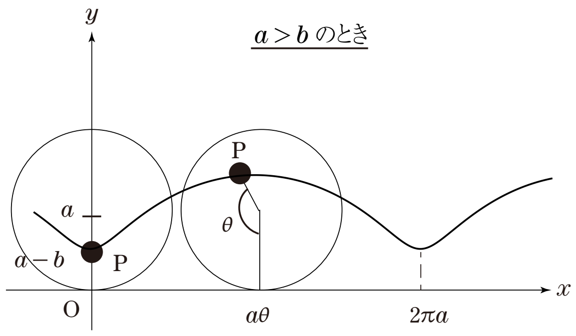
である．

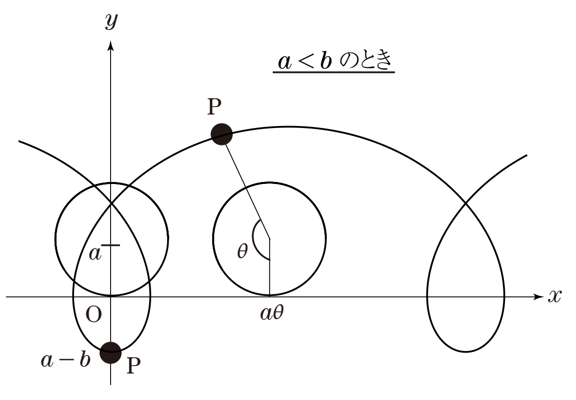
《考察》

今回の問題で出題されたトロコイドとは，定直線上を円がすべることなく回転するとき，円の内部あるいは外部にある点 P が描く曲線です．サイクロイドと似ていますが，点 P が円の内部にあるか外部にあるかによって，描かれる曲線の形が変わります（図 4）．また，問題では時刻 t をパ

ラメータとしていましたが，回転角 θ を用いて表すと一般的に，次のようになります．

図 4　（a : 円の半径，b : 中心から点 P までの距離）





$$
\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\theta\\ a\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{pmatrix}
=\begin{pmatrix} a\theta-b\sin\theta\\ a-b\cos\theta\end{pmatrix}
$$

《考え方》でも述べましたが，面積（体積）を考える際は，積分する方向への変化がパラメータの変化に対して単調であるかどうかが重要なので，このグラフの違いは大きいです．$a<b$ のパターンで面積を求める問題をやってみましょう．

> 問
>
> 図 4 において，$a=1$，$b=2$ とする．円が x 軸上をすべらないように 1 回転するとき，定点 P が描く曲線と直線 $y=-1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．ただし，点 P の始めの位置は $(0,\ -1)$ とする．

（解答）

図 5

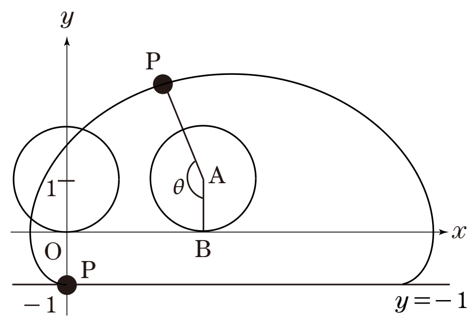


図 5 のように点 A をとり，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$ とおく．$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$
\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \theta\\ 1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\cos\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}
=\begin{pmatrix} \theta-2\sin\theta\\ 1-2\cos\theta\end{pmatrix}
$$

である．これより θ に関係なく $y\geqq-1$ であり，また $\dfrac{dx}{d\theta}=1-2\cos\theta$ であるから，次の増減表を得る．

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$\dfrac{dx}{d\theta}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
x	0	$\leftarrow$	$\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	$\rightarrow$	$\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$	$\leftarrow$	2π

ここで，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ に対応する y を y_1，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$ に対応する y を y_2，$\dfrac{5}{3}\pi\leqq\theta\leqq2\pi$ に対応する y を y_3 とすると，求める面積 S は

$$S=\int_{\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}}^{\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}}(y_2+1)dx-\int_{\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}}^{0}(y_1+1)dx-\int_{2\pi}^{\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}}(y_3+1)dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi}(y+1)\frac{dx}{d\theta}d\theta-\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}(y+1)\frac{dx}{d\theta}d\theta-\int_{2\pi}^{\frac{5}{3}\pi}(y+1)\frac{dx}{d\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}(y+1)\frac{dx}{d\theta}d\theta\cdots\cdots(*)$$
$$=\int_0^{2\pi}(2-2\cos\theta)\cdot(1-2\cos\theta)d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}(2-6\cos\theta+4\cos^2\theta)d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}(2\cos2\theta-6\cos\theta+4)d\theta$$
$$=\Big[\sin2\theta-6\sin\theta+4\theta\Big]_0^{2\pi}$$
$$=8\pi$$

である．

（コメント）

x の変化が単調ではありませんので，1つの x に対して複数の y が対応します．y を t の式で表すと同じ式ですが，対応する t の変域が異なります．これを一発で計算することはできませんので，x の変化が単調になるように分ける必要があります（今回の場合は3つに分ける）．要は図6の色付き部分の面積から図7の色付き部分の面積を引くことによって求めればよいのです．

図6

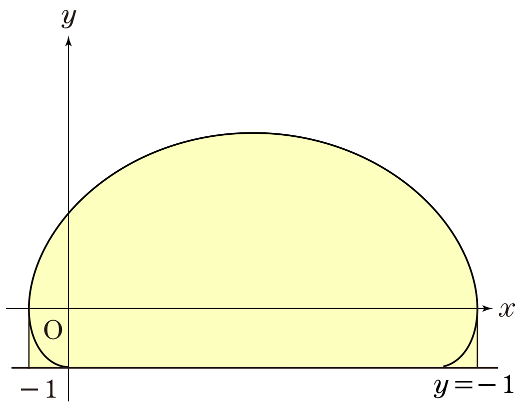
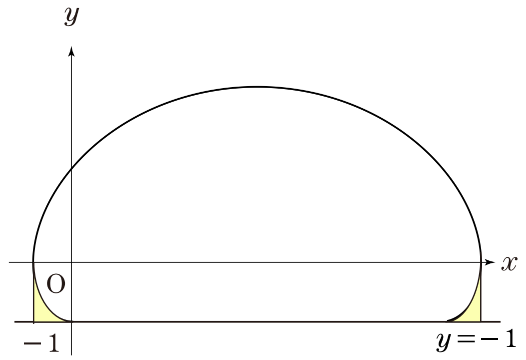


図7



また，計算の過程において，(*)のところで1つの積分にまとめることができました．これは偶然ではなく，x の変化が単調でない場合であっても，x の変化が単調な場合と同じく2つの図形の交点だけに依存する形になります．これは，次のように示せます．

図8

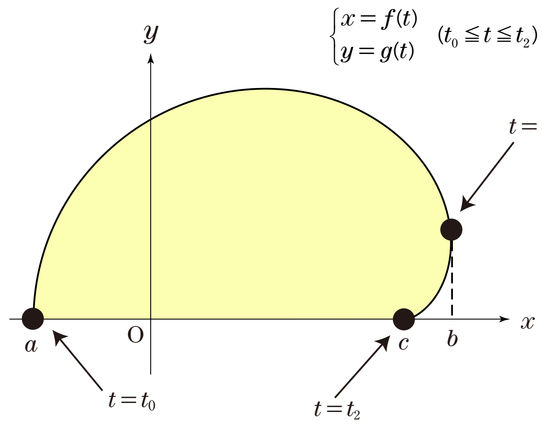


図8において，$t_0\leqq t\leqq t_1$ に対応する y を y_1，$t_1\leqq t\leqq t_2$ に対応する y を y_2 とすると色付き部分の面積 S は

$$S=\int_a^b y_1\,dx-\int_c^b y_2\,dx$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}y\cdot\frac{dx}{dt}dt-\int_{t_2}^{t_1}y\cdot\frac{dx}{dt}dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_2}y\cdot\frac{dx}{dt}dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_2}g(t)\cdot f'(t)dt$$

積分を1つにまとめられる事実を知っておけば，計算する上で役立ちますので，参考にしてください．ただし，結果的にこうなるだけですので，解答上は立式→置換→合体のステップを踏んで導くようにしましょう．

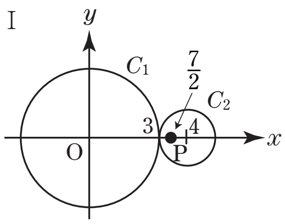
強者の戦略

　ある円を定直線上に回転させた今回の問題の他に，定円の周りに円を回転させるという話も有名です．最後に，それを紹介したいと思います．まずは次の問題を考えてみてください．

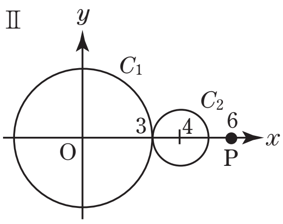
問

　円 C_2 を定円 C_1 に接しながら，すべることなく回転させるとき，点 P の描く曲線を考えよう．次の図Ⅰ～Ⅳはその始めの状況を表している．それぞれの場合について，描かれる曲線を下の①～④から選べ．

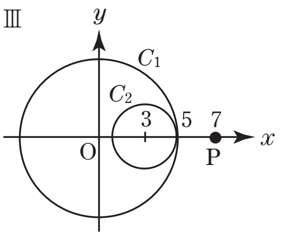
Ⅰ



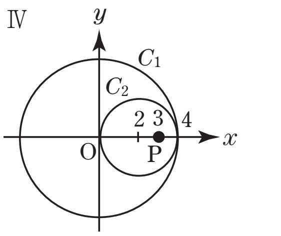
Ⅱ



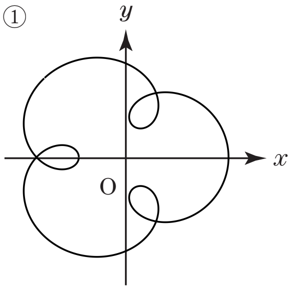
Ⅲ



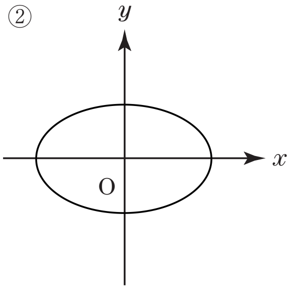
Ⅳ



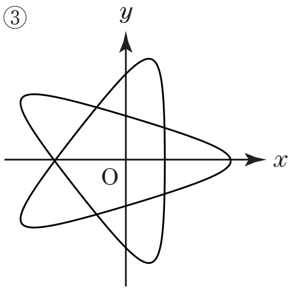
①



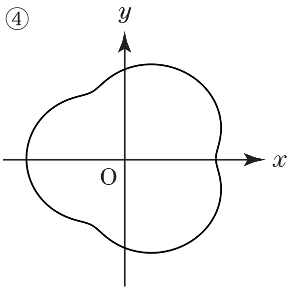
②



③



④



（解答）

　Ⅰ→④，Ⅱ→①，Ⅲ→③，Ⅳ→②

（コメント）

　円の外側を回転させたときに点 P が描く曲線はエピトロコイド，円の内側を回転させたときに点 P が描く曲線はハイポトロコイドと呼ばれています．この問題から円の半径や点 P の位置によって，いろいろな曲線が描けることがわかりますね．曲線の概形は，2 円の半径比と点 P が動円の内部にあるか外部にあるかに依ります．実際の動きを想像して，おおよそどんな曲線ができるか推測した人も多いと思いますが，もちろんここまでにやってきたように，パラメータで表す➡微分の流れでグラフの概形を描くことができます．また，Ⅳのときの点 P が描く曲線は②の楕円となっていますが，これは 2 円の半径比が 2 : 1 のハイポトロコイドのときに実現します．余力があれば計算して調べてみてください．

《おわりに》

　夏は刻一刻と近づいてきています．受験生にとっては，夏の過ごし方次第で合否が分かれるといっても過言ではありません．その夏を迎える前に必ず学習方針を確立しておきましょう．それが決まればあとは実行あるのみ．1 年間長い戦いですが，頑張っていきましょう．

（西村）