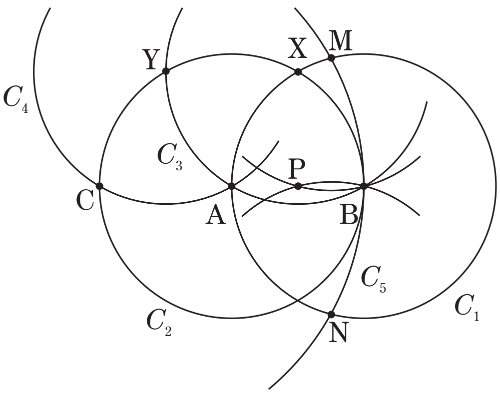
強者の戦略

数学科の松下です．みなさん，今回の問題はどうだったでしょうか．算数で昔を思い出していただけましたでしょうか．では解説します．

【1】コンパスだけを使って，与えられた2定点A，Bの中点を作図せよ．

＜解答＞

① Bを中心に半径BAの円 C_1 を描く．
② Aを中心に半径ABの円 C_2 を描く．
③ 2円 C_1，C_2 の交点の1つをXとし，Xを中心に半径XAの円 C_3 を描く．
④ 2円 C_2，C_3 の交点のうちBでない方ををYとし，Yを中心に半径YAの円 C_4 を描く．
⑤ 2円 C_2，C_4 の交点のうちXでない方をCとする．
(AはBCの中点になっている．)
⑥ 中心C，半径CBの円 C_5 を描く．
⑦ C_1 と C_5 の2交点をM，Nとする．M，Nを中心として半径MB＝NBの円を描き，これらの2交点のうち，Bでない交点Pが求める点である．



このようにして作図した点PがABの中点である理由(下図参照)．

△CBMは，CB＝CMの二等辺三角形より

$$\angle \mathrm{CBM} = \angle \mathrm{CMB}$$

である．

△MPBは，MP＝MBの二等辺三角形より

$$\angle \mathrm{MPB} = \angle \mathrm{MBP}$$

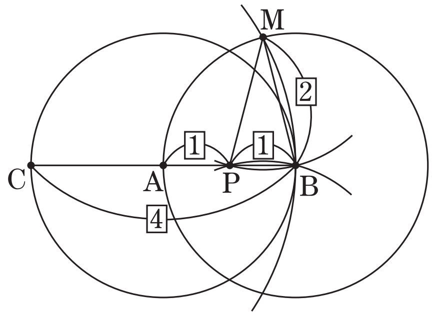
である．

よって，△CBMと△MPBは相似であり，相似比は2 : 1である．

ゆえに

$$\mathrm{PB} : \mathrm{AB} = \mathrm{PB} : \mathrm{MB} = 1 : 2$$

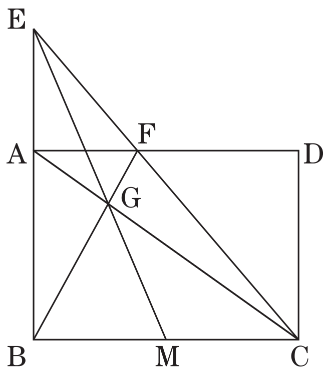
となり，PはABの中点となる．



【2】定規だけを使って，与えられた長方形の1つの辺の中点を作図せよ．

《解答》

[解1] (作図法) 下図の □ABCDにおいて，辺BAのA側の延長上に点Eを適当にとる．線分ECと辺ADの交点をFとし，線分FB，ACの交点をGとする．直線EGと辺BCの交点をMとすると，点Mは辺BCの中点である．



(証明)

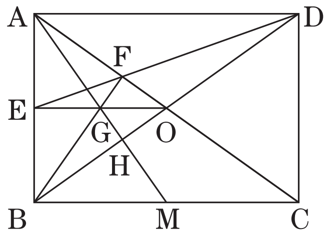
△EBCにおいて，FB，AC，EMは1点で交わるので，チェバの定理より

$$\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{AB}} \cdot \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}} \cdot \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FE}} = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．ここで，AD // BC より，$\dfrac{EA}{AB}=\dfrac{FE}{CF}$

なので，① より BM＝MC となり，点 M は BC の中点である．

［解 2］(作図法) 長方形 ABCD の対角線の交点を O とし，辺 AB 上に適当に点 E をとる．ED と AO の交点を F，FB と EO の交点を G として，直線 AG と辺 BC の交点を M とする．点 M は辺 BC の中点である．



(証明)AM と BD の交点を H とすると，ABO と点 G でチェバの定理，△ABO と直線 EF でメネラウスの定理より

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BH}{HO}\cdot\frac{OF}{FA}=1,\ \frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{DO}\cdot\frac{OF}{FA}=1$$

$$\therefore\ \frac{BH}{HO}=\frac{BD}{DO}$$

である．

よって

$$BH:HO=BD:DO=2:1$$

である．

△ABC において，点 H は中線 BO を 2 : 1 に内分する点なので，△ABC の重心である．

すると，直線 AM も三角形 ABC の中線となり，M は辺 BC を二等分している．

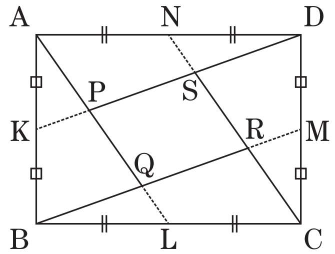
(4 点 B，O，H，D を調和点列という．)

これで，長方形の辺の中点を作図することが出来たので，これを利用して長方形の面積を 5 等分していきます．

【3】定規だけを使って，与えられた長方形の面積を五等分する線分を作図せよ．

《解答》

［解 1］下図のように長方形の各辺の中点をそれぞれ K，L，M，N とし，線分 AL，BM，CN，DK を引き交点を P，Q，R，S とする．



すると

$$(\text{▱PQRS})=(\triangle ABQ)=(\triangle BCR)$$
$$=(\triangle CDS)=(\triangle DAP)$$

となるので，面積は五等分されている．

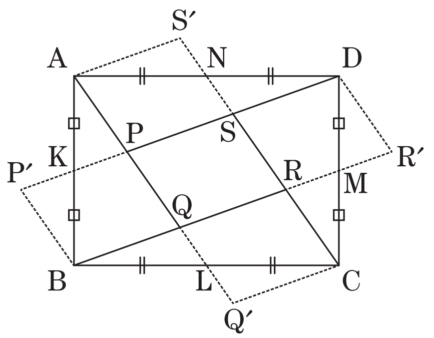
実際，次図のように点 P の点 K に関する対称点 P′ 等とすると，

$\triangle KAP\equiv\triangle KBP'$

▱PQRS≡▱P′BQP 等

(▱PQRS)＝(△ABQ) 等

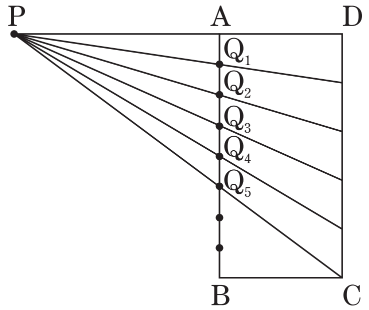
が成り立つ．



［解 2］前述の線分の中点の作図を辺 AB を繰り返し用いて，辺 AB の 8 等分点を作図する (次図参照，紙面の関係で長方形 ABCD は縦長にしている)．

8 等分点の A に近い方から順に Q_1，Q_2，Q_3，Q_4，Q_5 として，CQ_5 と直線 DA の交点を P とする．

直線 PQ_1，PQ_2，PQ_3，PQ_4，PQ_5 と辺 DC の交点が，辺 DC の 5 等分点となっている．



同様に，辺 AB の 5 等分点も作図でき，辺 AB と辺 DC の 5 等分点同士を AD に平行になるように結んでいけば，長方形 ABCD を合同な 5 個の長方形に分割できる．

【4】「ユークリッドのコンパス」だけを使って，次の円を作図せよ．

「平面上の 3 定点 A，B，C について，中心を A とする半径が線分 BC の長さと同じ円」

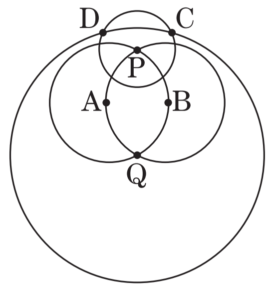
※「ユークリッドのコンパス」とは，任意に与えられた点を中心として，他の任意に与えられた点を通る円を描くことしかできない．つまり「ユークリッドのコンパス」は「長さを移す」道具ではない．

皆さんご存知の「コンパス」なら簡単な問題なのですが,「ユークリッドのコンパス」は「長さを移す」事が出来ません．簡単そうで難しい問題です．

紀元前 3 世紀ごろにエジプトで活躍していたユークリッド (Euclid) によって編纂された「原論」という数学書があります．その中には幾何学に関する幾つかの定義，定理，公準が載っており，作図に関する公準の中に「任意の点を中心とする任意の半径円を描くこと」とあります．この円を作図するための架空の器具を「ユークリッドのコンパス」と呼びます．

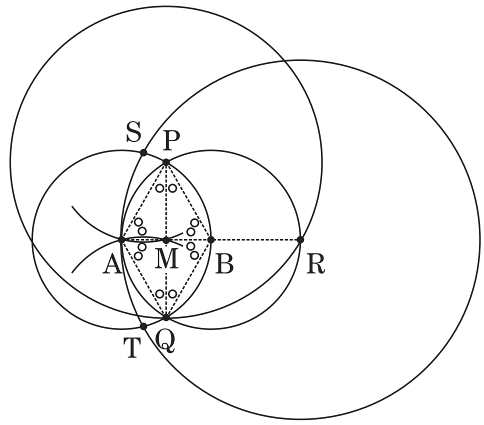
《解答》

[解 1] 点 A を中心とする点 B を通る円と，点 B を中心とする点 A を通る円を描き，これらの 2 交点を P，Q とする．次に，点 P を中心とする点 C を通る円と，点 Q を中心とする点 C を通る円を描き，これらの 2 交点のうち，C でない方の交点を D とすると, BC = AD であることがわかるので，点 A を中心とする半径 AD の円を描けば，これが求める円である．



[解 2] まず，AB の中点および点 A の点 B に関する対称点を作図する．点 A を中心とする点 B を通る円と，点 B を中心とする点 A を通る円を描き，これらの 2 交点を P，Q とする．次に，点 P を中心とする点 Q を通る円と，先ほどの点 B を中心とする円の交点を R とすると，点 R は点 A の点 B に関する対称点であることが簡単にわかる．

更に，点 R を中心とする点 A を通る円と，先ほどの点 A を中心とする円の 2 交点を S，T とする．点 S を中心とする点 A を通る円と，点 T を中心とする点 A を通る円の交点を M とすると，点 M は AB の中点となっている．



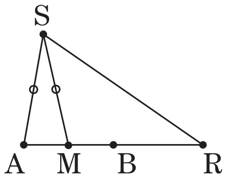
(証明) M が AB の中点であることは，次のように分かる．

$RS = RA$，$RA = 2AB$

なので，$\angle RSA = \angle RAS = \angle SMA$ である．

強者の戦略

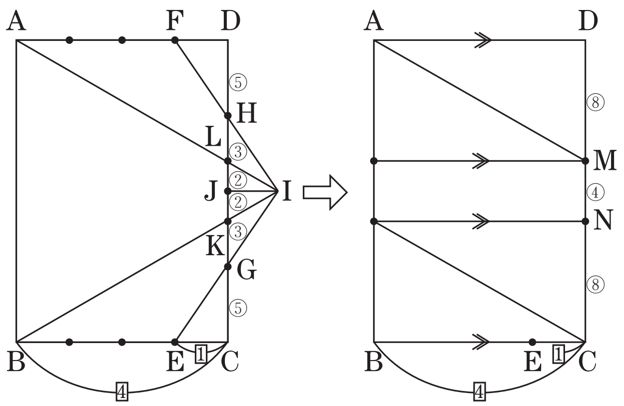
よって，△RSA∽△SAMとなり，相似比は2 : 1である．これとSA＝AB, RA＝2ABを得る．



[番外編]

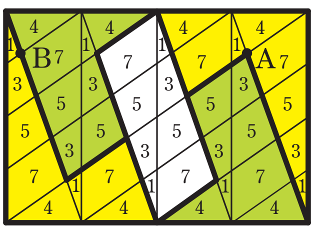
・6月○日，中3数学灘クラス@JR住吉校

生徒A「中点の作図は分からんけど，中点を使って面積は5等分はできた！」



直角三角形4つと真ん中の長方形はすべて面積同じ．

生徒B「俺もできた！」



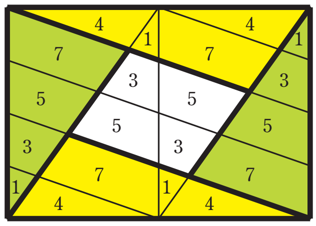
各辺を4等分し，上図のように，全体の面積を160として，$\dfrac{160}{5}=32$ずつの部分に分ける．

生徒C「H学園っぽい解答！」

一同「ほんまや！ H学園っぽい！ (爆笑)」

生徒B「いやおれM渕出身なんやけど！ (笑)」

生徒D「そんなに分けなくても，これでいいじゃん！」



$\dfrac{80}{5}=16$ずつに分ける．

一同「おお！こっちの方が綺麗！」

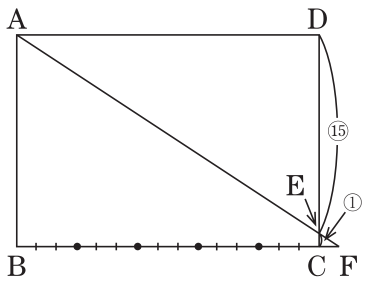
生徒E「てか，160に分けた図でAとBを結んだらええねん！下も同じようにして！」

一同「ほんまや！」

・6月△日，高2特選数学S@京都校

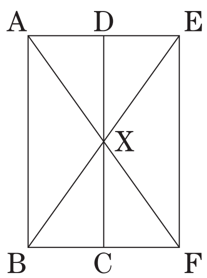
授業中，前述の中3灘の生徒たちが解いた解答を紹介すると，2人の生徒がそれぞれ黒板の前で解説してくれました．

<u>高2洛南N君の解法</u>



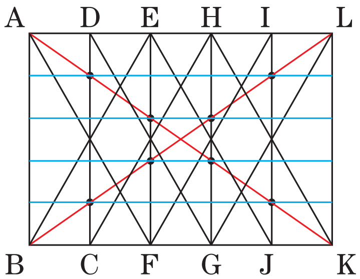
CDを16等分する (2等分をくり返す)．AEとBCの交点をFとする．BFを16等分した点をBに近い方から3つおきにとる．上の辺も同じようにとり，上下に線分を結ぶ．

<u>高2洛南S君の解法</u>



強者の戦略

DCの中点Xを通り，直線BXとADの交点をE，直線AXとBCの交点をFとし，長方形ABCDと合同な長方形DCFEをつくる．



同様にして，上のように長方形ABCDと合同な長方形が全部で5個並んだ大きな長方形を作り，青線4本を引くことで面積を5等分する．

いかがでしたでしょうか．今回は算数を思い出して頂けましたでしょうか．未来の強者たちの考えることはすごいですね！今後も，算数，数学の垣根に囚われず様々なことを伝えていきますので，お楽しみに！

（数学科　松下）