強者の戦略

今回の問題は【2016 お茶の水女子大学】の入試問題から出題しました．毎年のことながら，数学の試験ではよく考えられた問題が出題されている大学ですので，この問題も何らかの意図を持って作成されていると思います．もしかしたら，作問された人は「期待値」が数学Ｂに移ってしまったことを，私と同じように残念に感じているのかもしれません．

それでは，まず問題の確認です．

問題

サイコロを何回か振って最後に出た目を得点とするゲームを行う．ただし，得点が k となる確率を $p(k)$ としたとき

$$p(1)+2p(2)+3p(3)+4p(4)+5p(5)+6p(6)$$

を得点の期待値とよぶ．

(1)　サイコロを1回だけ振ることができるときの得点の期待値 E_1 を求めよ．

(2)　サイコロを2回まで振ることができるとき，1回目に m 以上の目が出たらそこでやめ．m より小さい目が出たら2回目を振ることにする．このときの得点の期待値 $E_2(m)$ を m を用いて表し，$E_2(m)$ が最大となる m を求めよ．

(3)　n を2以上の自然数，m_1，……，m_{n-1} を6以下の自然数とする．n 回までサイコロを振ることができるとき，i 回目に m_{n-i} 以上の目が出たらそこでやめ，m_{n-i} より小さい目が出たら $i+1$ 回目を振るという規則でサイコロを振り続ける．ただし，n 回サイコロを振ったらそこでやめる．このときの得点の期待値を

$$E_n(m_1,\ \cdots\cdots,\ m_{n-1})$$

とする．以下の問いに答えよ．

(i)　$E_3(m_1,\ m_2)$ を $E_2(m_1)$，m_2 を用いて表し，$E_3(m_1,\ m_2)$ が最大となる m_1，m_2 とそのときの $E_3(m_1,\ m_2)$ の値を求めよ．

(ii)　$n \geqq 4$ とする．$E_{n-1}(m_1,\ \cdots\cdots,\ m_{n-2})$ の最大値を e_{n-1} とすると，$E_n(m_1,\ \cdots\cdots,\ m_{n-1})$ が最大となるのは，$E_{n-1}(m_1,\ \cdots\cdots,\ m_{n-2})$ が e_{n-1} となり，かつ m_{n-1} が e_{n-1} 以上の最小の自然数となるときである．このことを示せ．

（解答1）

(1)　得点が k（$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 6$）となる確率は k によらず $\dfrac{1}{6}$ であるから，求める期待値は

$$E_1=\sum_{k=1}^{6}k\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6(1+6)}{2}=\frac{7}{2}$$

である．

《解説1》

(1)は与えられた定義通りに計算するたけなので，問題ないと思います．次に(2)なのですが，(1)とはルールが変わりましたので，具体的な数を代入して確認してみましょう．

たとえば，$m=2$ のときは，1回目に1が出たときのみ2回目を振り，1回目に2，3，4，5，6が出た場合はその目を得点とします．よって，得点が1となる確率は．1回目，2回目ともに1が出るときなので

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

であり，得点が2，3，4，5，6になる確率はそれぞれ，1回目に1が出るかどうかで分けて考えると

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{36}$$

となります．よって，期待値は

$$1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{7}{36}+3\cdot\frac{7}{36}+4\cdot\frac{7}{36}+5\cdot\frac{7}{36}+6\cdot\frac{7}{36}$$
$$=\frac{47}{12}$$

となります．

次に，$m=5$ のときも同様に考えると，得点が1，2，3，4になる確率は，1回目に4以下が出て，2回目に得点となる目が出るときなので，それぞれ

$$\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$$

であり，得点が5，6になる確率は，1回目に4以下の目が出るかどうかで分けて，それぞれ

$$\frac{1}{6}+\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{18}$$

となります．よって，期待値は

$$1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{9}+4\cdot\frac{1}{9}+5\cdot\frac{5}{18}+6\cdot\frac{5}{18}$$
$$=\frac{75}{18}$$

となります．以上のように，m の値を変えると期待値が変わるのですが，その中で最も期待値が大きくなるように m を決めよう，というのが (2) の目的です．とりあえず，具体例から見ると，得点が m より小さい i 点となる場合は，「1 回目に m より小さい目を出して，2 回目で i が出たとき」しかなく，得点が m 以上の j 点となる場合は，「1 回目に j が出たとき」と，「1 回目に m より小さい目を出して 2 回目で j が出たとき」の 2 パターンがあることがわかりました．このことを踏まえて，文字のままで期待値を計算すると，以下のようになります．

（解答 2）

(2)　サイコロを計 i 回（$i=1$，2）振り，かつ得点が k となる確率を $p_i(k)$ とおくと，$m=2$，……，6 のとき

$$p_1(k)=\begin{cases}0 & (k=1,\ \cdots\cdots,\ m-1)\\ \dfrac{1}{6} & (k=m,\ \cdots\cdots,\ 6)\end{cases}$$
$$p_2(k)=\frac{m-1}{6}\cdot\frac{1}{6}$$

であり，$m=1$ のとき

$$p_1(k)=1 \quad \text{かつ} \quad p_2(k)=0$$

であるから，どちらの場合でも期待値は

$$\begin{aligned}E_2(m)&=\sum_{k=1}^{6}k\{p_1(k)+p_2(k)\}\\&=\sum_{k=m}^{6}kp_1(k)+\sum_{k=1}^{6}kp_2(k) \quad \cdots\cdots\cdots(*)\\&=\sum_{k=m}^{6}k\cdot\frac{1}{6}+\sum_{k=1}^{6}k\cdot\frac{m-1}{6}\cdot\frac{1}{6} \quad \cdots(**)\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{(6-m+1)(m+6)}{2}+\frac{m-1}{6}\cdot E_1\\&=\frac{(7-m)(m+6)}{12}+\frac{7(m-1)}{12} \quad (\because (1))\\&=\frac{-m^2+8m+35}{12}\\&=\frac{-(m-4)^2+51}{12}\end{aligned}$$

となる．

以上より，$E_2(m)$ は $m=4$ のとき最大値 $\dfrac{17}{4}$ をとる．

［補足］

解答の $(*)$ の部分については，(3) において

1 回目で得点が決まるとき

2 回目以降で得点が決まるとき

を分けたほうが考えやすいため，本来の期待値の定義で $(*)$ の 1 行前を立式した後，Σ の性質を用いて，$(*)$ の形に分けています．

また，$(**)$ の左側の Σ 計算については，$k=1$ から始まっているとは限らないため，Σ 公式ではなく等差数列の和の公式を用いています．

《解説 2》

(2) においては，m の値が 6 通りしかないので，文字を使わずに気合で計算しても答えが出ますが，(3) 以降ではサイコロを振れる回数が増えるため，気合で求めるには煩雑になりすぎます．(2) において【最初の 1 回で得点が決まらなかったならば，2 回目以降（の分全体）の期待値は，振れる回数が 1 回少ないときの期待値と同じになる】ことに気づいておくと，(3) に繋げやすくなります．

さて (2) において，2 回目まで振れるのであれば，1 回目は 4 以上ならそこで止めて，3 以下なら振り直したほうが期待値が大きくなることがわかりました．(1) から，1 回だけ振れるときの期待値が $\dfrac{7}{2}=3.5$ と分かっているので，その期待値よりも大きくなる 4 以上のときは，振り直さないほうがよさそうではあります．

では，3 回目まで振れるのであれば，1 回目が終わってあと 2 回だけ振れるときに，1 回目に出た目が (2)

の期待値の $\dfrac{17}{4}=4.25$ より大きくなる 5 以上のときに振り直さないほうがよいのでしょうか．直感的には合ってそうですが，(3)(i) にて計算で確かめてみましょう．

ちなみに，(3) の問題において

“i 回目に m_{n-i} 以上の目が出たらそこでやめ”

という文章があります．これは

1 回目に m_{n-1} 以上の目が出たらやめ
2 回目に m_{n-2} 以上の目が出たらやめ
⋮
$(n-1)$ 回目に m_1 以上の目が出たらやめる

ということを表します．言い換えると

あと $(n-1)$ 回振れるとき
　m_{n-1} 以上の目が出たらやめ
あと $(n-2)$ 回振れるとき
　m_{n-2} 以上の目が出たらやめ
⋮
あと 1 回振れるとき
　m_1 以上の目が出たらやめる

ということです．全体で何回振れる設定になっていても，振り直さないかどうかの基準は（今が何回目の後かということよりも）あと何回振れるかで決めたほうが良いため，残り回数に合わせて添字の番号が振られています．

お待たせしました．それでは，(3)(i) の解答です．

（解答 3）

(3)(i)

サイコロを計 i 回（$i=1,\ 2,\ 3$）振り，かつ得点が k となる確率を $p_i(k)$ とおくと

$$p_1(k)=\frac{1}{6} \qquad (m_2 \leqq k \leqq 6)$$
$$p_2(k)=\frac{m_2-1}{6}\cdot\frac{1}{6} \qquad (m_1 \leqq k \leqq 6)$$
$$p_3(k)=\frac{m_2-1}{6}\cdot\frac{m_1-1}{6}\cdot\frac{1}{6} \quad (1 \leqq k \leqq 6)$$

であるから，(2) と同様に考えて

$$\begin{aligned}
&E_3(m_1,\ m_2)\\
&=\sum_{k=1}^{6}k\{p_1(k)+p_2(k)+p_3(k)\}\\
&=\sum_{k=m_2}^{6}kp_1(k)+\sum_{k=m_1}^{6}kp_2(k)+\sum_{k=1}^{6}kp_3(k)\\
&=\frac{1}{6}\sum_{k=m_2}^{6}k+\frac{m_2-1}{6}\left(\sum_{k=m_1}^{6}k\cdot\frac{1}{6}+\sum_{k=1}^{6}k\cdot\frac{m_1-1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\\
&=\frac{(7-m_2)(m_2+6)}{12}+\frac{m_2-1}{6}E_2(m_1)
\end{aligned}$$

と表される．さらに，(2) より

$$E_2(m_1) \leqq E_2(4)=\frac{17}{4}$$

であることと，$\dfrac{m_2-1}{6} \geqq 0$ より

$$\begin{aligned}
&E_3(m_1,\ m_2)\\
&\leqq E_3(4,\ m_2)\\
&=\frac{(7-m_2)(m_2+6)}{12}+\frac{m_2-1}{6}\cdot\frac{17}{4}\\
&=\frac{-2m_2^2+19m_2+67}{24}\\
&=\frac{-2\left(m_2-\frac{19}{4}\right)^2+\frac{19^2}{8}+67}{24}
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$4<\frac{19}{4}<5$$

かつ

$$\left|5-\frac{19}{4}\right|<\left|4-\frac{19}{4}\right|$$

であるから，$E_3(4,\ m_2)$ は $m_2=5$ のとき最大となる．

以上より，$E_3(m_1,\ m_2)$ は

$$(m_1,\ m_2)=(4,\ 5)$$

のとき最大となり，求める最大値は

強者の戦略

$$E_3(4,\ 5)=\frac{-2\cdot5^2+19\cdot5+67}{24}$$
$$=\frac{14}{3}$$

である.

《解説 3》

実際に計算してみたら，予想通り (2) で求めた期待値を超える 5 以上のときに，振り直さないほうがよいことが示されました！　……ですが，(i) では具体的に計算しただけなので，もしかしたらもしかすると，振れる回数を多くしたときに，規則性が崩れるときがあるのかもしれません．そこで，「そんなことはない！」と一般的に示すのが (ii) ということになります．具体的な計算で予測したことを一般化してみましょう．ここでも【最初の 1 回で得点が決まらなかったならば，2 回目以降（の分全体）の期待値は，振れる回数が 1 回少ないときの期待値と同じになる】ことが活用できます.

（解答 4）

(ii)　$n\geqq4$ のとき，(i) と同様にして

$$E_n(m_1,\ \cdots\cdots,\ m_{n-1})$$
$$=\sum_{k=1}^{6}k\{p_1(k)+p_2(k)+\cdots\cdots+p_n(k)\}$$
$$=\sum_{k=m_{n-1}}^{6}kp_1(k)+\sum_{k=m_{n-2}}^{6}kp_2(k)+\cdots\cdots+\sum_{k=1}^{6}kp_n(k)$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{k=m_{n-1}}^{6}k+\frac{m_{n-1}-1}{6}\left(\sum_{k=m_{n-2}}^{6}k\cdot\frac{1}{6}+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\cdots+\sum_{k=1}^{6}k\cdot\frac{m_{n-2}-1}{6}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{k=m_{n-1}}^{6}k+\frac{m_{n-1}-1}{6}E_{n-1}(m_1,\ \cdots,\ m_{n-2})\ \cdots(***)$$

と表され，$E_{n-1}(m_1,\ \cdots\cdots,\ m_{n-2})$ の最大値を e_{n-1} とすると，$\dfrac{m_{n-1}-1}{6}\geqq0$ より

$$E_n(m_1,\ \cdots\cdots,\ m_{n-1})$$
$$\leqq\frac{(7-m_{n-1})(m_{n-1}+6)}{12}+\frac{m_{n-1}-1}{6}e_{n-1}\cdots\cdots①$$

が成り立つ．ここで ① の右辺は，C，C' を定数として

$$\frac{-m_{n-1}{}^2+(2e_{n-1}+1)m_{n-1}+C}{12}$$
$$=-\frac{1}{12}\left\{m_{n-1}-\left(e_{n-1}+\frac{1}{2}\right)\right\}^2+C'$$

と表される．さらに，e_{n-1} 以上の最小の自然数を N で表せば

$$e_{n-1}\leqq N<e_{n-1}+1$$
$$\iff\left(e_{n-1}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\leqq N<\left(e_{n-1}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\ \cdots(****)$$

である．加えて，一般に実数 α に対し区間

$$\left[\alpha-\frac{1}{2},\ \alpha+\frac{1}{2}\right)$$

においては，整数はただ 1 つのみ含むので，N は $e_{n-1}+\dfrac{1}{2}$ に最も近い整数である.

以上より，$E_n(m_1,\ \cdots\cdots,\ m_{n-1})$ が最大となるのは，

$$E_{n-1}(m_1,\ \cdots\cdots,\ m_{n-2})=e_{n-1}$$

かつ

$$m_{n-1}=N$$

となるときであることが示された.（証明終）

《解説 4》

まず，(***) において

$$\frac{m_{n-1}-1}{6}\left(\sum_{k=m_{n-2}}^{6}k\cdot\frac{1}{6}+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\cdots+\sum_{k=1}^{6}k\cdot\frac{m_{n-2}-1}{6}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{m_{n-1}-1}{6}E_{n-1}(m_1,\ \cdots,\ m_{n-2})$$

となる部分について説明します．(3)(i) において，全部で 3 回振れるとき，1 回目で得点が決まらなかったときの期待値を計算する部分に注目すると

$$\sum_{k=m_1}^{6}kp_2(k)+\sum_{k=1}^{6}kp_3(k)$$
$$=\frac{m_2-1}{6}\left(\sum_{k=m_1}^{6}k\cdot\frac{1}{6}+\sum_{k=1}^{6}k\cdot\frac{m_1-1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{m_2-1}{6}E_2(m_1)$$

と変形できています．これは，1 回目で得点が決ま

らなかったならば，残り 2 回分の期待値については m_1 が決まっていれば，全部で 2 回振れるときと同じように計算できることを表しています．これを一般的に考えると，全部で n 回振れるとき，1 回目で得点が決まらなかったならば，残り $(n-1)$ 回分の期待値については m_{n-2}，m_{n-3}，……，m_2，m_1 が決まっていれば，全部で $(n-1)$ 回振れるときと同じように計算できるということです．このことから，(***) において，2 回目以降で得点が決まるときの期待値を

（1 回目で得点が決まらない確率）

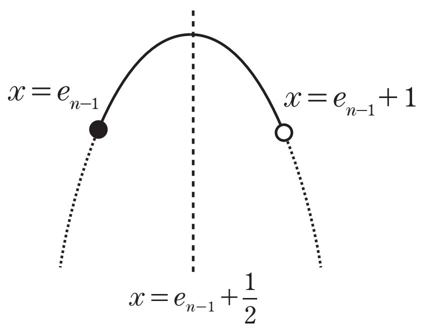
×

（全部で $(n-1)$ 回振れるときの期待値）

で計算しています．

その後，① の右辺を平方完成するところまでは問題ないと思います．

次に m_{n-1} が e_{n-1}（＝あと $(n-1)$ 回振れるときの期待値の最大値）以上の最小の自然数のときに，軸に最も近くなることを示す部分を見てみましょう．放物線は軸に関して左右対称なので，軸から見て左右 $\dfrac{1}{2}$ ずつ広げて幅 1 の範囲を考えれば，その中に整数を 1 つだけ含むようにできます．



今回はそれが解答の中の N であることを示せばよいので，(****) の形に変形したわけです．今回は，問題文から

$$e_{n-1} \leqq N < e_{n-1}+1$$

を得ることができるので，示しやすくなっています．

（最後に）

今回の (3) から，e_{n-1} や m_1，……，m_{n-1} を具体的に求めると，次のようになります．

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \frac{7}{2} = 3.5\\
e_2 &= E_2(4) = \frac{17}{4} = 4.25\\
e_3 &= E_3(4,\ 5) = \frac{14}{3} = 4.66\cdots\\
e_4 &= E_4(4,\ 5,\ 5)\\
&= \frac{(7-5)(5+6)}{12} + \frac{5-1}{6}\cdot e_3\\
&= \frac{89}{18} = 4.94\cdots\\
e_5 &= E_5(4,\ 5,\ 5,\ 5)\\
&= \frac{(7-5)(5+6)}{12} + \frac{5-1}{6}\cdot e_4\\
&= \frac{277}{54} = 5.12\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

直感的に，振れる回数が多い方が期待値は大きくなりますから，これ以降，期待値が 5 未満になることはありません．よって，$j \geqq 5$ のとき $m_j=6$ となるわけです．東大や慶応大の過去問でも，3 回目までの問題は出題されていたのですが，お茶の水女子大のおかげで，振れる回数を何回に設定されても，最高の条件で臨むことができそうです……もちろん残念なことに，実際にこんなゲームを行う機会はないのですが，期待値を上手に使えば「これから行おうとしていることが有利か不利か」の判断を『起こりやすいかどうかの確率』だけではなく，『得点』という別のファクター（確率変数といいます）も絡めて判断することができるわけです．

次回以降，できれば条件付き確率の問題で，何かの判断に役立ちそうな問題を探してみたいと思います．その際は，また一緒に賢くなりましょう．

（数学科　中西）