強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第 1 問（数 III）

α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，方程式

$x(1-\cos x)=\sin(x+\alpha)$ を考える．

(1)　n を正の整数とするとき，上の方程式は $2n\pi<x<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ．

(2)　(1) の解を x_n とおく．極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n-2n\pi)$ を求めよ．

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(x_n-2n\pi)$ を求めよ．

＜解答＞

(1)　$$f(x)=x(1-\cos x)-\sin(x+\alpha)$$

とおく．

$$f'(x)=1-\cos x+x\sin x-\cos(x+\alpha)$$
$$f''(x)=2\sin x+x\cos x+\sin(x+\alpha)$$

である．$2n\pi<x<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$f''(x)$ の各項は正であるから

$$f''(x)>0$$

であり，$f'(x)$ は単調に増加する．

これと

$$f'(2n\pi)=-\cos\alpha<0$$
$$f'\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1+2n\pi+\frac{\pi}{2}+\sin\alpha>0$$

より

$$f'(x)=0,\ 2n\pi<x<2n\pi+\frac{\pi}{2}$$

を満たす x がただ 1 つ存在する．これを β_n とすると，$f(x)$ の増減表は

x	$(2n\pi)$	$\cdots$	β_n	$\cdots$	$\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\sin\alpha$	↘		↗	$2n\pi+\dfrac{\pi}{2}-\cos\alpha$

となる．

$$-\sin\alpha<0$$
$$2n\pi+\frac{\pi}{2}-\cos\alpha>2n\pi+\frac{\pi}{2}-1>0$$

であるから，$f(x)=0$ すなわち

$$x(1-\cos x)=\sin(x+\alpha)$$

を満たす x が $2n\pi<x<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にただ 1 つ存在することが示された．

(2)　x_n は方程式 $f(x)=0$ の解であるから

$$x_n(1-\cos x_n)=\sin(x_n+\alpha)\quad\cdots\cdots①$$
$$2n\pi<x_n<2n\pi+\frac{\pi}{2}\quad\cdots\cdots②$$

が成り立つ．

$$x_n-2n\pi=\theta_n\iff x_n=\theta_n+2n\pi$$

とおくと，② より

$$0<\theta_n<\frac{\pi}{2}$$

であり，① は

$$(\theta_n+2n\pi)\{1-\cos(\theta_n+2n\pi)\}=\sin(\theta_n+2n\pi+\alpha)$$
$$\iff(\theta_n+2n\pi)(1-\cos\theta_n)=\sin(\theta_n+\alpha)\quad\cdots\cdots③$$
$$\iff 1-\cos\theta_n=\frac{\sin(\theta_n+\alpha)}{\theta_n+2n\pi}\quad\cdots\cdots④$$
$$(\because\ \theta_n+2n\pi>0)$$

となる．ここで

$$0\leqq\left|\frac{\sin(\theta_n+\alpha)}{\theta_n+2n\pi}\right|\leqq\frac{1}{2n\pi}$$

であり

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}=0$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin(\theta_n+\alpha)}{\theta_n+2n\pi}\right|=0$$

である．よって，④ より

$$\lim_{n\to\infty}(1-\cos\theta_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\theta_n+\alpha)}{\theta_n+2n\pi}=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\cos\theta_n=1$$

である．$0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$ であることと

$$y=\cos x\ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

の逆関数の連続性から

$$\lim_{n\to\infty}\theta_n=0 \iff \lim_{n\to\infty}(x_n-2n\pi)=0$$

である.

(3) ③ より

$$\theta_n+2n\pi=\frac{\sin(\theta_n+\alpha)}{1-\cos\theta_n}$$

$(\because\ 1-\cos\theta_n \neq 0)$

$$\iff\ n=\frac{\sin(\theta_n+\alpha)}{2\pi(1-\cos\theta_n)}-\frac{\theta_n}{2\pi}$$

であるから

$$\begin{aligned}&\sqrt{n}(x_n-2n\pi)\\&=\sqrt{\left\{\frac{\sin(\theta_n+\alpha)}{2\pi(1-\cos\theta_n)}-\frac{\theta_n}{2\pi}\right\}\cdot\theta_n}\\&=\sqrt{\frac{\sin(\theta_n+\alpha)}{2\pi}\cdot\frac{\theta_n^2}{1-\cos\theta_n}-\frac{\theta_n^3}{2\pi}}\\&\to\sqrt{\frac{\sin\alpha}{\pi}}\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

である. ここで, 最後の極限計算には

$$\begin{aligned}\frac{\theta_n^2}{1-\cos\theta_n}&=\left(\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}\right)^2\cdot(1+\cos\theta_n)\\&\to 2\ \ (n\to\infty,\ \theta_n\to 0)\end{aligned}$$

であることを用いた.

＜コメント＞

数学科の川﨑です. 今回の極限の問題はいかがだったでしょうか？一筋縄ではいかないので, 要所要所で実力差が答案に現れると思います. 自分がどこまでできて, どこが足りていないのかを確認してください (えてして, 成績が伸びる人は, この自分に足りないものの把握が上手いです).

以下, 設問毎の補足です.

(1) 方程式の解の個数に関する問題です. 文字定数 α が含まれていて, さらに左辺の形から「解けない」と判断するのが第一歩. すると, やれることは, 関数のグラフの話に持ち込むことです. このとき, いきなり $y=$ (左辺), $y=$ (右辺) のグラフを考えるのではなく, 共有点が見やすいように工夫しましょう. よく使う変形は

・(左辺) − (右辺) を作って x 軸との共有点を見る

・定数があれば分離する

などです. この問題で α を分離するのは至難の業ですので, (左辺) − (右辺) を考えましょう.

グラフを考えますので, 微分しますが, 1 度微分しただけでは符号が決まりません. そこで再度微分することになります. この

「1 回でだめだから, もう 1 回微分しよう」

という発想があるかどうかは大きな差として現れます. 練習が要るところです. $f''(x)$ を考えると, 現れる各項が正になり (角度が鋭角のとき, sin, cos, tan はいずれも正ですね), $f'(x)$ の単調性が示せます. よって $f'(x)$ の区間の端を調べることで, $f'(x)$ の符号が決まり, $y=f(x)$ のグラフが描けるようになります. 途中, $f'(x)=0$ となる点が出てきますが, この点の x 座標は求まらないので, 文字で置いて (解答中の β_n) 処理しましょう.

よくある誤答としては, 区間の端である

$$f(2n\pi),\ f\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

の符号を調べるだけで, 題意は示せたとするものがあります. これらの符号は異なるので, 中間値の定理から少なくとも 1 個 $f(x)=0$ となる x が与えられた区間に存在することは言えますが, 問題が要求しているのは

「ちょうど 1 個」

あることを示すことです. ですので, 単に中間値の定理を使うだけでは弱く, グラフの概形をきちんと考えなくてはいけません.

(2) x_n を具体的に求めることはできませんので, 鍵を握るのは関係式 ① になります. まず, 極限を求める主役である θ_n を準備し, ① を θ_n で書き直した関係式 ③ を準備します. この式をよーく眺めましょう. sin, cos は −1 以上 1 以下の間の値をとるのに対して, $2n\pi$ の項がいくらでも大きくなってしまうのがポイントです. ということは, $2n\pi$ にかかる $1-\cos\theta_n$ は 0 に近づくはずで, 解答ではこれに狙いをつけて変形しています. すると

$$\lim_{n\to\infty}\cos\theta_n=1$$

という式が得られ, これから θ_n の極限が決まります. ここに, $y=\cos x$ の逆関数の連続性を用い

ます．少し補足しましょう．

$$y=\cos x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$$

の逆関数を

$$y=g(x)$$

とします．このとき，逆関数の定義から

$$g(\cos x)=x$$

が成り立ちます．そして，$g(x)$ は連続ですので

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\theta_n &= \lim_{n\to\infty} g(\cos\theta_n)\\ &= g\left(\lim_{n\to\infty}\cos\theta_n\right)\\ &= g(1)\\ &= 0\end{aligned}$$

となります．上の等式の 1 行目から 2 行目の変形で $g(x)$ の連続性を使っていることに注意してください．

余談ですが，(3) を見ると (2) の答えが 0 であることは予測できます．答えが 0 でないと，(3) の答えが一瞬で出てしまい，あまり意味の無い問題になってしまいますね．

(3)　$\sqrt{n}\theta_n$ の極限を考えることになります．そのために，まず関係式から n を θ_n で表すのがポイントです．(2) から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}=1$ ですので，三角関数の部分の極限は処理できます．邪魔なのは n なわけですね．n を消してしまえば，あとはすべて根号の中に入れて $\dfrac{\theta_n^2}{1-\cos\theta_n}$ の極限を求めればおしまいです．

$$\frac{1}{1-\cos\theta_n}=\frac{1+\cos\theta_n}{1-\cos^2\theta_n}=\frac{1+\cos\theta_n}{\sin^2\theta_n}$$

とするか

$$\frac{1}{1-\cos\theta_n}=\frac{1}{2\sin^2\dfrac{\theta_n}{2}}$$

として，cos を sin に変えれば極限が計算できます．

今回の問題は，高 2 のある生徒に (高 3 でなく高 2 です)，「学校のテストでこれに似たテーマの問題が出るから，問題をください」と言われて探し出した滋賀医科大学の問題です．ここ数年の入試問題を見てみると，同じテーマの問題が（特に医学科で）ちらほらと出題されていました．

テーマとしては非常に有名で，「方程式の解が具体的には分からないので，方程式を変形して極限が求まる形にもっていく」力が要ります．十分に練習してください．

最後に 1 問練習問題をつけておきます．

問

n を自然数とし，関数 $f_n(x)=\sin^{n+1}x$ の $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ における変曲点の x 座標を x_n とする．

(1)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)$ を求めよ．

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)$ を求めよ．

(3)　点 $(x_n, f_n(x_n))$ における曲線 $y=f_n(x_n)$ の接線と x 軸との交点を P_n とし，直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ との交点を Q_n とする．3 点 P_n，Q_n および $\mathrm{R}_n\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ を頂点とする三角形の面積を S_n とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}S_n$ を求めよ．

＜解答＞

(1)

$$\begin{aligned}f_n{}'(x)&=(n+1)\sin^n x\cos x\\ f_n{}''(x)&=(n+1)(n\sin^{n-1}x\cos^2 x\\ &\qquad -\sin^{n+1}x)\\ &=(n+1)\sin^{n-1}x\cdot\{n-(n+1)\sin^2 x\}\\ &\quad(\because\ \cos^2 x=1-\sin^2 x)\end{aligned}$$

であるから，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において

$$\begin{aligned}f_n{}''(x)=0 \iff& \sin^2 x=\frac{n}{n+1}(<1)\\ \iff& \sin x=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\\ &(\because\ \sin x>0)\end{aligned}$$

である．これを満たす x は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ にただ 1 つ

存在し，その前後で $f_n''(x)$ は符号変化するので，このxが x_n である．

すなわち

$$\sin x_n=\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

であり，$0<x_n<\frac{\pi}{2}$ より

$$\cos x_n=\sqrt{\frac{1}{n+1}},\ \tan x_n=\sqrt{n}$$

である．

よって

$$\begin{aligned}f_n(x_n)&=\sin^{n+1}x_n\\&=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\\&=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\\&=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)=e^{-\frac{1}{2}}$$

である．

(2) $$\sin x_n=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}\to 1\quad(n\to\infty)$$

であり，$0<x_n<\frac{\pi}{2}$ より，$y=\sin x\ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数の連続性から

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$$

である．

$$\frac{\pi}{2}-x_n=\theta_n$$

とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\theta_n=0$$

であり

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)&=\sqrt{n}\theta_n\\&=\sqrt{n}\sin\theta_n\cdot\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}\\&=\sqrt{n}\cos x_n\cdot\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}\\&=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}\cdot\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}\end{aligned}$$

である．よって

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)=1$$

である．

(3) 点 $(x_n,\ f_n(x_n))$ における曲線 $y=f_n(x)$ の接線の方程式は

$$\begin{aligned}&y=f_n{}'(x_n)(x-x_n)+f_n(x_n)\\\iff\ &y=(n+1)\sin^n x_n\cos x_n(x-x_n)\\&\qquad\qquad+\sin^{n+1}x_n\end{aligned}$$

である．よって，$y=0$ として

$$\begin{aligned}x&=-\frac{\tan x_n}{n+1}+x_n\\&=-\frac{\sqrt{n}}{n+1}+x_n\end{aligned}$$

が点 P_n の x 座標である．また，$x=\frac{\pi}{2}$ として

点 Q_n の y 座標は

$$\begin{aligned}&\sin^{n+1}x_n\left\{(n+1)\frac{\cos x_n}{\sin x_n}\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)+1\right\}\\&=f_n(x_n)\left\{\frac{n+1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)+1\right\}\\&=f_n(x_n)\frac{n+1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\pi}{2}-x_n+\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)\end{aligned}$$

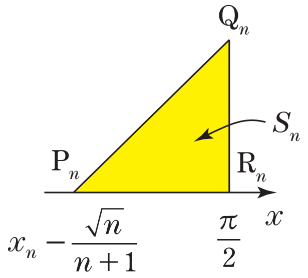
である．

$$x_n-\frac{\sqrt{n}}{n+1}<x_n<\frac{\pi}{2}$$

であることに注意して

$$S_n=\frac{1}{2}f_n(x_n)\frac{n+1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\pi}{2}-x_n+\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)^2$$

である．



　したがって

$$\begin{aligned}\sqrt{n}S_n &= \frac{1}{2}f_n(x_n)\\ &\qquad\times\frac{n+1}{n}\left\{\sqrt{n}\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)+\frac{n}{n+1}\right\}^2\\ &= \frac{1}{2}f_n(x_n)\\ &\qquad\times\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\sqrt{n}\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right\}^2\\ &\to \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\cdot 1\cdot(1+1)^2 \quad (n\to\infty)\\ &= 2e^{-\frac{1}{2}} \quad (\because\ (1),\ (2))\end{aligned}$$

である．

＜解答終＞

　いかがだったでしょうか？この問題では，x_n は求まりませんが

$$\sin x_n = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

と表せることから，三角関数の極限が計算できるようになります．(2) の

$$n\theta_n = n\sin\theta_n\cdot\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}$$

という変形がスラスラとできると，実力がアップしたと実感できるはずです．そのくらいになるまで，しつこく繰り返し練習してください．

　それでは，今回はここまでにしたいと思います．また次回．

＜数学科　川﨑＞