強者の戦略

数学科の西村です．今回の問題はいかがだったでしょうか．今回は2016年度広島大学の入試問題から出題しました（1問小問をカットしています）．先週の問題編でも書いた通り，この分野は昨年度から本格的に出題されておりますので，今後の理系入試において頻出分野になると思われます．特有の計算に慣れていないと辛い分野ですので，しっかり対策をしておきましょう．

さて，それでは本題．まずは解答です．

問

複素数平面上を，点Pが次のように移動する．

1. 時刻0ではPは原点にいる．時刻1まで，Pは実軸の正の方向に速さ1で移動する．移動後のPの位置を $Q_1(z_1)$ とする．
2. 時刻1にPは $Q_1(z_1)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻2までその方向に速さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する．移動後のPの位置を $Q_2(z_2)$ とする．
3. 以下同様に，時刻 n にPは $Q_n(z_n)$ において，進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する．移動後のPの位置を $Q_{n+1}(z_{n+1})$ とする．ただし，n は自然数である．

$\alpha=\dfrac{1+i}{2}$ として，次の問いに答えよ．

(1) z_n を α，n を用いて表せ．

(2) Pが $Q_1(z_1)$，$Q_2(z_2)$，…… と移動するとき，Pはある点 $Q(w)$ に近づく．w を求めよ．

(3) z_n の実部が(2)で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ．

《考え方》

(1) 点列 Q_n を表す複素数列 $\{z_n\}$ の一般項は直接求められません．同じ操作の繰り返しですから，漸化式作成の方向で考えましょう．回転は複素数の得意技ですよね．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n$ をどう考えるかが問われた問題です．α が実数なら，$-1<\alpha<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$ とできますが，α が複素数のときは同じようにはできません．$|\alpha|^n$ の極限値に着目するのがポイントとなります．

(3) z_n の実部を求める方針で進めることもできますが，少々計算が面倒になります．そこで，k を整数として

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(z_n)>\mathrm{Re}(w)\\ \iff\ &\mathrm{Re}(z_n-w)>0\\ \iff\ &-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\arg(z_n-w)<\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{aligned}$$

とすれば，極形式で考えていけますので，解答がシンプルになります．

《解答》

(1) 原点を $Q_0(z_0)$ とすると，$n\geqq 0$ において

$$\begin{aligned}&z_{n+2}-z_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(z_{n+1}-z_n)\\ \iff\ &z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n)\end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}z_{n+1}-z_n&=(z_1-z_0)\cdot\alpha^n\\ &=\alpha^n\end{aligned}$$

であり，これより $n\geqq 1$ において

$$\begin{aligned}z_n&=z_0+\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k\\ &=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\end{aligned}$$

である．

(2) $|\alpha^n|=|\alpha|^n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|\alpha^n|=0$ である．よって，n を限りなく大きくすると，α^n は0に近づくので，z_n は $\dfrac{1}{1-\alpha}=1+i$ に近づく．よって，$w=1+i$ である．

(3) (1)，(2)より

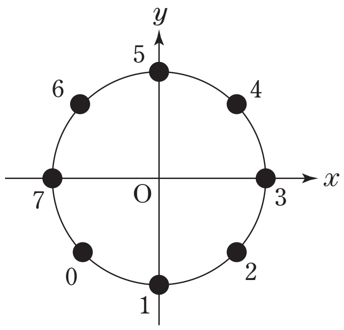
$$\begin{aligned}z_n-w&=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}-(1+i)\\ &=(1+i)(1-\alpha^n)-(1+i)\\ &=-\alpha^n(1+i)\\ &=-2\alpha^{n+1}\end{aligned}$$

である．条件より，k を整数として

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(z_n-w)>0\\ \iff\ &-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\arg(z_n-w)<\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{aligned}$$

を満たす n を考えればよい．ここで，$\arg\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ である

から，$\arg(z_n-w)=\dfrac{5}{4}\pi+(n-1)\cdot\dfrac{\pi}{4}$ となり，z_n-w の偏角は 8 を法として次図のようになる．



よって，求める n の条件は

$$n\equiv 2,\ 3,\ 4\ (\mathrm{mod}.8)$$

を満たす自然数である．

《解説》

複素数の問題を解くにあたり，大きく次の 4 つの方針が考えられます．

$\boxed{1}$　$a+bi$ の形で計算する

$|z|^2=z\cdot\bar{z}$ など複素数の計算の根源となる公式の証明や，軌跡の問題などで xy 座標系に置き換えて考えたいときに用います．計算量が多くなるケースが多いので，最終手段という位置付けとしておきましょう．

$\boxed{2}$　極形式で計算する

回転や冪乗計算に向いています．三角関数の処理能力が求められますので，身につけておきましょう．

$\boxed{3}$　z と $\bar{z}$ のみで処理する

実数，純虚数となる条件や，絶対値が絡む計算で利用します．

$\boxed{4}$　図形的意味を考える

この方針で解決すれば，最もシンプルです．常に念頭に置いておきましょう．

問題によってどの方針が最適かが異なりますので，その選択が問題解決の 1 つの鍵となります．今回は回転がテーマの問題ですので，$\boxed{2}$ だろうと考えて進めると良いでしょう．

(1)　点列の移動問題は，「数列の極限」の分野からも出題される重要テーマです．xy 平面で考える（$z_n=x_n+y_ni$ とおいて考える）こともできますが，解答が少々面倒になります．やはり回転には複素数が強いです．

(1) で出てきた漸化式は 3 項間漸化式なので，次のように解くこともできます．

（別解 1）

$$z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n)\ \cdots\cdots\ (*)$$

より

$$z_{n+2}-\alpha z_{n+1}=z_{n+1}-\alpha z_n$$

と変形できる．よって

$$z_{n+1}-\alpha z_n=z_1-\alpha z_0$$
$$=1\ \cdots\cdots\ ①$$

である．ここで

$$x-\alpha x=1 \iff x=\frac{1}{1-\alpha}\ \ (\because \alpha\neq 1)$$

なので

$$z_{n+1}-\frac{1}{1-\alpha}=\alpha\left(z_n-\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

となる．よって

$$z_n-\frac{1}{1-\alpha}=\left(z_0-\frac{1}{1-\alpha}\right)\cdot\alpha^n$$
$$=-\frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$
$$\iff z_n=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

である．

3 項間漸化式 $(*)$ の特性解が

$$x^2-x=\alpha(1-x)$$
$$\iff x=1,\ \alpha$$

となることから，①を導くことができました．また，特性解が 2 つありますので，次のように解くこともできます．

（別解 2）

$(*)$ より

$$z_{n+1}-z_n=(z_1-z_0)\cdot\alpha^n$$
$$=\alpha^n\ \cdots\cdots\ ②$$

であり，①－②を計算すると

$$(1-\alpha)z_n=1-\alpha^n$$
$$\Longleftrightarrow\ z_n=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

である.

今回は本解答のように, 立式した時点で(*)の形になっているので，その形を利用して解くのが最もシンプルですが，基本的には 3 項間漸化式は①，②のように 2 項間漸化式を 2 式作成して解くのが楽ですね.

(2)　複素数では実数範囲で普段当たり前に使っている公式でも使えなくなるものがいろいろあります.

例えば，z，α が実数のとき

・$|z|^2=z^2$

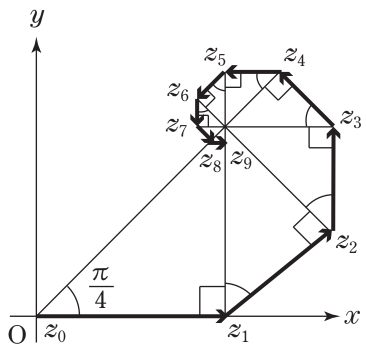
・$z^2=\alpha \Longleftrightarrow z=\pm\sqrt{\alpha}$

などとできますが，z，α が虚数であれば，これらは成り立たなくなります．複素数はこれら以外にも特有の変形がありますので，正しく理解し，計算できるようになってください．今回の場合だと，(1) で行った等比数列の和の公式は $\alpha\neq1$ であれば複素数範囲で使えます.
しかし，(2) での極限計算は実数範囲でしか行えませんので注意してください.

また, 点 P の極限点 Q については, 図形的考察により, その収束の様子がわかります.

$$z_n-w=-\alpha^n(1+i)$$
$$=-2\alpha^{n+1}$$
$$|\alpha|=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \arg\alpha=\frac{\pi}{4}$$

により，$\mathrm{Q}_n(z_n)$ は $\mathrm{Q}(w)$ を中心として，縮みながら回転していきます（下図).



$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍で $\frac{\pi}{4}$ 回転ですから，直角二等辺三角形が張り付いていく感じですね.

《おわりに》

この夏は充実したものになりましたでしょうか．夏に頑張った人は必ず実りの秋を迎えられるはずです．体調には気をつけて勉学に励んでください．あと半年，頑張れ受験生！！

（西村）