強者の戦略

今回の問題は幾何の有名不等式の証明でした.

それでは，まず問題の確認です.

> 問題
>
> 平面上の互いに異なる 4 点 A，B，C，D について，複素数を用いて次の不等式が成り立つことを示せ.
>
> $$AC \times BD \leqq AB \times CD + AD \times BC$$
>
> 等号が成立する条件についても，言及すること.

証明するべき不等式の不等号を等号に置き換えると，円に内接する四角形 ABCD に関する定理である「トレミーの定理」となります。これを一般的な四角形に拡張したものが証明するべき不等式で,「トレミーの不等式」とか「オイラーの公式」と呼ばれるものです。

この不等式を証明するために，次の 2 つの補題を証明しておきます.

補題 1

相異なる 4 つの複素数 α，β，γ，δ で表される 4 点が，同一円周上または同一直線上にあるための条件は

$$\frac{(\alpha-\beta)}{(\gamma-\beta)}\Big/\frac{(\alpha-\delta)}{(\gamma-\delta)}$$

が 0 でない実数であることである.

証明

2π の整数倍を無視して

$$\arg\frac{(\alpha-\beta)}{(\gamma-\beta)}\Big/\frac{(\alpha-\delta)}{(\gamma-\delta)}=\angle\gamma\beta\alpha-\angle\gamma\delta\alpha$$

である.

さて，4 点 α，β，γ，δ が同一円周上または同一直線上にあるとして，次の 2 つの場合に分けて考える.

(1) 2 点 α，γ が 2 点 β，δ を分離しない場合

$$\angle\gamma\beta\alpha=\angle\gamma\delta\alpha \iff \arg\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\Big/\frac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta}=0$$

よって，$\dfrac{(\alpha-\beta)}{(\gamma-\beta)}\Big/\dfrac{(\alpha-\delta)}{(\gamma-\delta)}$ は正の実数である.

(2) 2 点 α，γ が 2 点 β，δ を分離する場合

$$\angle\gamma\beta\alpha=-\angle\gamma\delta\alpha \iff \arg\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\Big/\frac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta}=\pm\pi$$

よって，$\dfrac{(\alpha-\beta)}{(\gamma-\beta)}\Big/\dfrac{(\alpha-\delta)}{(\gamma-\delta)}$ は負の実数である.

以上より，示せた.

補題 2

任意の 4 つの複素数 α，β，γ，δ に対して，等式

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)=(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)$$

が成り立つ.

証明

両辺を展開して整理すると，ともに

$\alpha\beta-\delta\alpha-\beta\gamma+\gamma\delta$ となり，成り立つ.

よって，示せた.

それでは，解答です.

4 点 A，B，C，D を表す複素数を α，β，γ，δ とおく.

補題 2 の恒等式の両辺の絶対値をとって,

$$|(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)|=|(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)|$$

右辺で三角不等式を用いると,

$$|(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)|\leqq|(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)|+|(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)|$$

となり，不等式

$$AC \times BD \leqq AB \times CD + AD \times BC$$

が成り立つ.

等号は，$\arg(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)=\arg(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)$

$$\Leftrightarrow \arg\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}=0$$

$$\Leftrightarrow \arg\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\gamma-\beta)(\alpha-\delta)}=\pi$$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{(\alpha-\beta)}{(\gamma-\beta)}\Big/\dfrac{(\alpha-\delta)}{(\gamma-\delta)}$ が負の実数のとき成立.

補題 1 より，等号は A，C と B，D が同一円周上または同一直線上にあって，互いに分離される時に限って成立する.