強者の戦略

それでは，前回の解答です．

> **第 1 問（数 III）**
>
> (1)　絶対値が 1 である複素数 α，β，γ について
>
> $$|\alpha-\beta|^2+|\beta-\gamma|^2+|\gamma-\alpha|^2+\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$$
>
> の値を求めよ．
>
> (2)　三角形 ABC の外接円の直径 d に対して
>
> $$AB^2+BC^2+CA^2=2d^2$$
>
> が成り立つとき，この三角形は直角三角形であることを示せ．

＜解答＞

(1) $|\alpha|=1 \iff \alpha\overline{\alpha}=1 \iff \overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ （$\because$ $\alpha \neq 0$）

である．同様にして

$$\overline{\beta}=\frac{1}{\beta},\ \overline{\gamma}=\frac{1}{\gamma}$$

である．

すると

$$\begin{aligned}|\alpha-\beta|^2&=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})\\&=(\alpha-\beta)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)\\&=2-\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\end{aligned}$$

であり，同様にして

$$|\beta-\gamma|^2=2-\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\beta}{\gamma},\ |\gamma-\alpha|^2=2-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\gamma}{\alpha}$$

である．

また

$$\begin{aligned}&\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}\\&=\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\gamma}\right)\\&=2+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}\end{aligned}$$

である．よって，与式は

$$\begin{aligned}&\left(2-\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)+\left(2-\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\beta}{\gamma}\right)+\left(2-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\gamma}{\alpha}\right)\\&\qquad+\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}+2\right)=8\end{aligned}$$

である．

(2)　複素数平面上で考える．三角形 ABC の外心が原点と一致するようにとり

$$A(z_1),\ B(z_2),\ C(z_3)$$

とする．

すると

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=\frac{d}{2}\ (>0)$$

であるから

$$\frac{2z_1}{d}=\alpha,\ \frac{2z_2}{d}=\beta,\ \frac{2z_3}{d}=\gamma$$

とすると

$$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$$

である．

よって，(1) より

$$\begin{aligned}&|\alpha-\beta|^2+|\beta-\gamma|^2+|\gamma-\alpha|^2\\&\qquad=-\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}+8\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

が成り立つ．

また

$$AB^2+BC^2+CA^2=2d^2$$

より

$$|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2=2d^2$$

である．この両辺を $\left(\dfrac{d}{2}\right)^2$ で割って

$$|\alpha-\beta|^2+|\beta-\gamma|^2+|\gamma-\alpha|^2=8\quad\cdots\cdots②$$

である．

①，② より

$$\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}=0$$

である．これより

$$\alpha=-\beta\quad\text{または}\quad\beta=-\gamma\quad\text{または}\quad\gamma=-\alpha$$

であり，$\dfrac{d}{2}$ をかけて

$$z_1=-z_2\quad\text{または}\quad z_2=-z_3\quad\text{または}\quad z_3=-z_1$$

である．

いま，原点が三角形ABCの外心であるから，AB，BC，CAのいずれか1つは，三角形ABCの外接円の直径となる．

よって，三角形ABCは直角三角形である．

＜証明終＞

＜コメント＞

数学科の川崎です．今回の複素数平面の問題はいかがだったでしょうか．図形問題に応用が利くのはベクトルと同じですね．複素数ならではの変形を味わってください．

以下，設問ごとの補足です．

(1)　絶対値が1の複素数に関する計算問題です．確実におさえなくてはいけないのは

$$|\alpha|=1 \iff \alpha\overline{\alpha}=1 \iff \overline{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$$

$$|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$$

の2つです．絶対値1がきたら，共役複素数がもとの複素数の逆数になるので，共役を考えることで式変形が上手く進むことが多いです．今回は絶対値の2乗があるので，展開する過程で共役を扱うようになっています．最悪なのは

$$|\alpha-\beta|^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

とすることです．実数の絶対値では

$$|a|^2=a^2 \quad (a\text{ は実数})$$

が成り立ちますが，複素数の絶対値では，絶対値の中身が虚数になると成り立ちません．$|i|^2$ を考えてみてください．

$\dfrac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$ は大変ですが，展開してバラバラにすると，前半の項とうまく打ち消し合って，答えがきれいになります．

(2)　(1)の利用を考えましょう．(1)の中に絶対値が1という条件がありますので，それを作りにいきます．問題文に外接円の直径があることから，外接円の中心を原点にもってきます．これにより，解答中の z_1，z_2，z_3 の絶対値が等しくなります．絶対値を1にしなければならないので，両辺を $\dfrac{d}{2}(=|z_1|)$ で割りましょう．すると，(1)が使えるようになります（解答中の数式①）．

また

$$\mathrm{AB}=|z_1-z_2|$$

などから，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2$ は z_1，z_2，z_3 で表すことができます．ベクトルと同じ感覚ですね．これも $\left(\dfrac{d}{2}\right)^2$ で両辺を割ることで，解答中の数式②を得ます．①と②を合わせると嬉しい式が得られますね．

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=0$$

となるので，$\alpha+\beta$，$\beta+\gamma$，$\gamma+\alpha$ のうちいずれかが0となります．例えば $\alpha+\beta$ が0とすると，

$$\beta=-\alpha \iff z_2=-z_1$$

となりますので，（ベクトル的に考えて）3点A，O，Bはこの順に1直線上に並んでいることになります．すなわち，線分ABが外接円の直径になるので，三角形ABCが直角三角形であることが示されます．

この問題の(2)は，複素数を前面に出さなければ，以下のような問題になります．

> **問**
>
> 三角形ABCの外接円の半径を R とする．
>
> $$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2=8R^2$$
>
> が成り立つとき，この三角形は直角三角形であることを示せ．

（注：直径よりも半径の方が見やすいので，R で書き直しました．）

この形で出されれば，手の広い問題になります．複素数平面でなくても解けますので，いくつか解法を紹介します．

＜別解1＞　三角関数を用いる方法

正弦定理より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=2R \iff \mathrm{BC}=2R\sin A$$

であり，同様にして

$$\mathrm{CA}=2R\sin B,\ \mathrm{AB}=2R\sin C$$

である．

よって

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2=8R^2$$
$$\iff 4R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)=8R^2$$
$$\iff \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2 \quad \cdots\cdots(*)$$

となる．さらに変形して

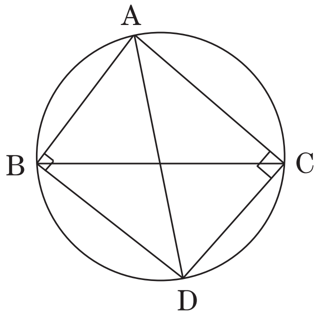
$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$$
$$\iff \frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}=2$$
$$\iff \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1$$
$$\iff 2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos 2(\pi-A-B)=-1$$
$$\iff 2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos 2(A+B)=-1$$
$$\iff 2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2(A+B)-1=-1$$
$$\iff 2\cos(A+B)\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}=0$$
$$\iff 4\cos(\pi-C)\cos A\cos B=0$$
$$\iff \cos A\cos B\cos C=0$$

である．よって，$\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ のいずれかは 0 であるので，三角形 ABC は直角三角形である．

＜証明終＞

＜別解 2＞　幾何を用いる方法

三角形 ABC の 3 つの内角のうち，最大角 (複数あるときはその 1 つ) を ∠BAC としてよい．



点 D を，線分 AD が三角形 ABC の外接円の直径となるようにとる．∠BAC が最大角であることから，点 A と点 D は線分 BC に関して反対側にある．

すると，直径に対する円周角より

$$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{ACD}=90^\circ$$

であるから，三平方の定理より

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AD}^2-\mathrm{BD}^2=4R^2-\mathrm{BD}^2$$
$$\mathrm{CA}^2=\mathrm{AD}^2-\mathrm{CD}^2=4R^2-\mathrm{CD}^2$$

である．これら 2 式を加えて

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2=8R^2-(\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2)$$

である．一方，仮定より

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2=8R^2-\mathrm{BC}^2$$

であるから

$$8R^2-(\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2)=8R^2-\mathrm{BC}^2$$
$$\iff \mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BC}^2$$

となる．よって

$$\angle\mathrm{BDC}=90^\circ$$

であり，円に内接する四角形の性質より

$$\angle\mathrm{BAC}=180^\circ-90^\circ=90^\circ$$

である．

よって，三角形 ABC は直角三角形である．

＜証明終＞

＜別解 1＞は三角関数を用いています．正弦定理から左辺が sin の 2 乗の和で表されます．そこから，半角の公式，和積の公式，倍角の公式，和積の公式を順に用いて変形していきます．いったん C を消して，最後に C に戻しています．慣れが要りますが，有名な変形ですので，きちんとおさえてください．

＜別解 2＞は，発想が難しいですが，補助点 D をとることで，三平方の定理だけで示すことができるというものです．この方法は同僚の I 先生に教えてもらいました．この場を借りて感謝申し上げます．ちなみに，最大角を決めて議論しないと，点 D が線分 BC と反対側に来ず，失敗します．

なお，京都大学の 2002 年度理系の問題に類題があります．

「半径 1 の円に内接する三角形 ABC において，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2$ の最大値は 9 で，最大値をとるのは正三角形のときであることを示す」

という問題です．かなり前になりますが，この強者への道・数学のページの第 16 回，17 回で取り上げています (当時は若かりし頃で，解答が手書きでした)．興味がある人はぜひそちらもご覧ください．

強者の戦略

絶対値 1 の複素数について有名なものとして，1 の n 乗根があります．強者を目指す皆さんは，次の問題も 1 度は解いておいてください．

問

n を 3 以上の自然数とするとき次を示せ．ただし，$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とし，i は虚数単位とする．

(1)　$\alpha^k+\overline{\alpha}^k=2\cos\dfrac{2k\pi}{n}$　(k は整数)

(2)　$n=(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots\cdots(1-\alpha^{n-1})$

(3)　$\dfrac{n}{2^{n-1}}=\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\cdots\sin\dfrac{n-1}{n}\pi$

＜解答＞

(1)
$$\alpha^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$
$$\overline{\alpha}^k=\overline{\alpha^k}=\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

であるから

$$\alpha^k+\overline{\alpha}^k=2\cos\frac{2k\pi}{n}$$

である．

(2)
$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \cdots\cdots,\alpha^{n-1}$$

は，方程式 $z^n-1=0$ の n 個の異なる解であるから

$$z^n-1=(z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)\cdots\cdots(z-\alpha^{n-1})$$

である．

また

$$z^n-1=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots\cdots+z+1)$$

であるから

$$\begin{aligned}&z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots\cdots+z+1\\&\quad=(z-\alpha)(z-\alpha^2)\cdots\cdots(z-\alpha^{n-1})\end{aligned}$$

が成り立つ．この式で $z=1$ として

$$n=(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots\cdots(1-\alpha^{n-1})$$

である．

(3)　$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ に対して

$$\begin{aligned}1-\alpha^k&=1-\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\\&=2\sin^2\frac{k\pi}{n}+2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\\&=2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n}+i\cos\frac{k\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

であるから

$$\left|1-\alpha^k\right|=2\sin\frac{k\pi}{n}\ \left(\because\ 0<\frac{k\pi}{n}<\pi\right)$$

である．

すると，(2) より

$$n=\left|1-\alpha\right|\left|1-\alpha^2\right|\cdots\cdots\left|1-\alpha^{n-1}\right|$$

であるから

$$n=2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi$$
$$\iff\ \frac{n}{2^{n-1}}=\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi$$

である．

＜解答終＞

いかがだったでしょうか．1 の n 乗根は $z^n=1$ から様々な関係式を導くことができます．一連の変形に 1 度は触れておきましょう．

それでは今回はここまでにしたいと思います．また次回．

＜数学科　川﨑＞