強者の戦略

数学科の西村です．今回の問題はいかがだったでしょうか．今回は2011年度大阪大学の入試問題から出題しました．解答の流れはシンプルですが，計算量が多く，苦戦した人もいるのではないでしょうか．また，式変形においてもいろいろ考えられるので，どうすれば良さそうかを判断する力も必要です．受験に臨む前に，この場でしっかり確認していってください．

では，もう一度問題を確認して，解答といきましょう．

> 問
>
> 実数 θ が動くとき，xy 平面上の動点 $\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$ および $\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$ を考える．θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，平面内で線分PQが通過する部分を D とする．D を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めよ．

《考え方》

まずは線分PQの通過領域 D を求めましょう．“直線”ではなく“線分”の通過領域という所が厄介ですが，2点P，Qの動きを見ることで，$0 \leqq x \leqq 8$，$0 \leqq y \leqq 1$ のみ考えればよくなりますので，解決します．$0 \leqq x \leqq 8$ 内で x を固定し，θ の変化に対する y の変化を調べましょう．

D が求まれば，体積 V の計算方法自体はそう難しくないので，計算ミスのないように丁寧に計算するのみです．

《解答》

2点P，Qの動きを考えることにより，領域 D について，$0 \leqq x \leqq 8$，$0 \leqq y \leqq 1$ のみ考えればよいことがわかる．

i)　$x=0$ 上について，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ および点Pの動きを考えることで，$0 \leqq y \leqq 1$ となる．

ii)　$x=8$ 上について，$\theta=0$ のときを考えることで，$y=0$ となる．

iii)　$0<x<8$ の部分について考える．

直線PQの方程式は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において

$$y=-\frac{\sin\theta}{8\cos\theta}x+\sin\theta$$
$$\iff y=-\frac{\tan\theta}{8}x+\sin\theta \qquad \cdots\cdots\ (*1)$$

である．ここで x を固定し，θ の変化に対する y の変化を調べる．

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta}&=-\frac{x}{8\cos^2\theta}+\cos\theta\\ &=\frac{-x+8\cos^3\theta}{8\cos^2\theta}\end{aligned}$$

である．ここで，$0<x<8$ であるから，$8\cos^3\theta=x$ を満たす θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ にただ1つ存在する．これを α とおく．

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
y	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	$(-\infty)$

$\theta=\alpha$ のとき

$$\begin{aligned}y&=-\frac{\sin\alpha}{8\cos\alpha}x+\sin\alpha\\ &=-\frac{\sin\alpha}{8\cos\alpha}\cdot 8\cos^3\alpha+\sin\alpha \qquad \cdots\cdots\ (*2)\\ &\qquad\qquad (\because\ x=8\cos^3\alpha)\\ &=\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)\\ &=(1-\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}} \quad (\because\ \sin\alpha>0)\end{aligned}$$

であるから，$8\cos^3\alpha=x \iff \cos\alpha=\left(\dfrac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ より

$$y=\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

である．よって，$0 \leqq y \leqq 1$ と合わせて，y のとり得る値の範囲は

$$0 \leqq y \leqq \left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

である．

以上i)，ii)，iii)より，領域 D を表す不等式は

$$\begin{cases}0 \leqq x \leqq 8\\ 0 \leqq y \leqq \left\{1-\left(\dfrac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}\end{cases}$$

である．よって，求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^8\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^3 dx$$

である．ここで，$\dfrac{x}{8}=t$ とおくと　$\cdots\cdots\ (*3)$

$dx=8dt$ ，

x	$0\to 8$
t	$0\to 1$

であるから

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1\left(1-t^{\frac{2}{3}}\right)^3\cdot 8\,dt\\&=8\pi\int_0^1\left(1-3t^{\frac{2}{3}}+3t^{\frac{4}{3}}-t^2\right)dt\\&=8\pi\left[t-\frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}t^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1\\&=\frac{128}{105}\pi\end{aligned}$$

である．■

《考察》

まずは《解答》に関しての補足です．

・(*1) について

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のときは直線 PQ の方程式をこの形では表せない（$x=0$ となる）ことに注意してください．また今回，y の増減を調べる際に $x=0,\ 8$ があると面倒ということを踏まえて，$x=0,\ 8$ 上に関しては先に考えておきました．細かい部分への配慮が必要ですね．

・(*2) について

$8\cos^3\alpha=x$ を用いて x を消去し，一旦パラメータ表示の形にしましたが，もちろんはじめから (*2) の一行上の式に $\sin\alpha=\left\{1-\left(\dfrac{X}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$，$\cos\alpha=\left(\dfrac{X}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$ を代入して，α を消去する流れでもよいです（そんなに計算量は変わらないと思います）．

・(*3) について

計算が少々面倒であるため，$\dfrac{x}{8}=t$ と置換して計算しましたが，もちろん置換せずに計算することも可能です（以下）．

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^8\left\{1-3\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}+3\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{4}{3}}-\left(\frac{x}{8}\right)^2\right\}dx\\&=\pi\left[x-\frac{9}{5}\cdot 8\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}\cdot 8\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}\cdot 8\left(\frac{x}{8}\right)^3\right]_0^8\\&=\frac{128}{105}\pi\end{aligned}$$

では，ここからは今回の問題のテーマである通過領域と体積計算に関して考察していきたいと思います．

＜通過領域の求め方について＞

通過領域の求め方には 3 つの方法があります．

$\boxed{1}$ 順像法

x を固定し，パラメータの変化に対する y の変化を調べる．

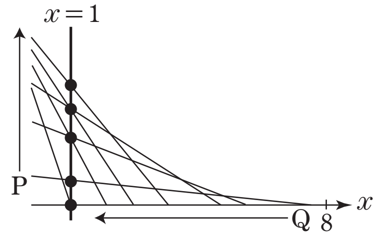
$\boxed{2}$ 逆像法

動かす図形の方程式をパラメータについての方程式と見て，そのパラメータが実数解として存在する条件を調べる．

$\boxed{3}$ 包絡線の利用

動かす図形がパラメータの値に関係なく接する曲線を持ち出し，図形を直接動かして考える．

《解答》では，$\boxed{1}$ の手法で領域 D を求めました．この手法の考え方は以下の通りです．例えば，$x=1$ 上の点で線分 PQ の通過する点を考えます．



今回は上図のような感じだとイメージできますが，図はあくまでイメージなので，実際には直線 PQ の方程式に $x=1$ を代入し，θ を動かしたときに y がとり得る値の範囲を考えて求めます．このようなことを他の x の値に対しても考えていけばよいのですが，もちろんすべての x の値に対して行うことはできませんので，ある x で固定して，y のとり得る範囲を調べようという感じになります．

次に，$\boxed{2}$ の手法ですが，これは平面上の点に対して，通過する点かどうかを考える方法です．例えば，点 $(0,\ 0)$ は通過する点かどうか考えます．これは直線 PQ の方程式に当てはめることでわかります．

$$0=-\frac{1}{8}(\tan\theta)\cdot 0+\sin\theta \iff \theta=0\ \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

つまり $\theta=0$ のときに通過することがわかります．このように代入したときに θ の値が与えられた範囲内に出てくるかどうかで，通過するかどうかを判断することができます．もちろん平面上のすべての点に対して 1 つずつ調べることは不可能なので，点 $(X,\ Y)$ が通過領域にあるための条件，すなわち $Y=-\dfrac{1}{8}(\tan\theta)X+\sin\theta$ を満たす θ が存在するための条件を考えればよいということになります．

（[2] の手法での解答）

通過領域 D 内の任意の点を $(X,\ Y)$ とおく．

（$0 \leqq X \leqq 8$，$0 \leqq Y \leqq 1$ だけ考えればよく，$X=0$，8 上の領域を $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ で考えておく部分までは《解答》と同じ）

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき直線 PQ の方程式は

$$y=-\frac{1}{8}(\tan\theta)x+\sin\theta$$
$$\iff x\tan\theta+8y-8\sin\theta=0 \quad \cdots\cdots(*4)$$

であるから，$(X,\ Y)$ の満たすべき条件は

$X\tan\theta+8Y-8\sin\theta=0$ を満たす θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に存在するための条件として与えられる．

ここで，$f(\theta)=X\tan\theta+8Y-8\sin\theta$ とおく．

$$f'(\theta)=\frac{X}{\cos^2\theta}-8\cos\theta=\frac{X-8\cos^3\theta}{\cos^2\theta}$$

であり，$0<X<8$ より，$8\cos^3\theta=X$ を満たす θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ にただ 1 つ存在する．これを α とおくと，増減表は以下のようになる．

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$	$(8Y)$	$\searrow$		$\nearrow$	$(+\infty)$

よって，求める条件は

$$f(\alpha)\leqq 0$$
$$\iff X\tan\alpha+8Y-8\sin\alpha\leqq 0$$
$$\iff 8\cos^3\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+8Y-8\sin\alpha\leqq 0 \quad (\because\ 8\cos^3\alpha=X)$$
$$\iff \sin\alpha(\cos^2\alpha-1)+Y\leqq 0$$
$$\iff Y\leqq(1-\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}} \quad (\because\ \sin\alpha>0)$$
$$\iff Y\leqq\left\{1-\left(\frac{X}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}} \quad (\because\ 8\cos^3\alpha=X)$$

となり，$0\leqq Y\leqq 1$ より $0\leqq Y\leqq\left\{1-\left(\dfrac{X}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$ となる．

$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のときと合わせると，領域 D は

$$\begin{cases} 0\leqq x\leqq 8 \\ 0\leqq y\leqq\left\{1-\left(\dfrac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

である．（以下，解答と同様）■

1 点補足です．(*4) について，《解答》と同様に，この形の直線 PQ の方程式は $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ では定義できないので注意してください．また，PQ の方程式として

$$x\sin\theta+8y\cos\theta-8\sin\theta\cos\theta=0\cdots\cdots①$$

$$\frac{x}{8\cos\theta}+\frac{y}{\sin\theta}=1\cdots\cdots②$$

などの形で考えることもできると思います．

①の場合は，$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ でも定義できるというメリットはありますが，左辺を微分したときに

$$x\cos\theta-8y\sin\theta-8\cos 2\theta$$

となり，増減を考えるのが厳しくなります．よって，この形を選択するのは上手くありません．

②の場合は，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で定義され（つまり $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ については別に考える），次のように解答に至ることができます．

（別解）

通過領域 D 内の任意の点を $(X,\ Y)$ とおく．

（$0\leqq X\leqq 8$，$0\leqq Y\leqq 1$ だけ考えればよく，$X=0$，8 上の領域を $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ で考えておく部分までは《解答》と同じ）

$(X,\ Y)$ の満たすべき条件は，$\dfrac{X}{8\cos\theta}+\dfrac{Y}{\sin\theta}=1$ を満たす θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に存在するための条件として与えられる．$g(\theta)=\dfrac{X}{8\cos\theta}+\dfrac{Y}{\sin\theta}\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$g'(\theta)=\frac{X}{8}(\cos\theta)^{-2}\sin\theta-Y(\sin\theta)^{-2}\cos\theta$$
$$=\frac{X\sin^3\theta-8Y\cos^3\theta}{8\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

である．ここで $X>0$，$Y>0$ より，$X\sin^3\theta-8Y\cos^3\theta=0$ を満たす θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ においてただ 1 つ存在し，これを α とおくと，増減表は以下のようになる．

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$g'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$g(\theta)$	$(+\infty)$	$\searrow$		$\nearrow$	$(+\infty)$

よって，求める条件は

$$\begin{aligned} & g(\alpha) \leqq 1 \\ \iff & \frac{X}{8\cos\alpha} + \frac{Y}{\sin\alpha} \leqq 1 \\ \iff & \frac{1}{8\cos\alpha} \cdot \frac{8Y\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha} + \frac{Y}{\sin\alpha} \leqq 1 \\ \iff & Y \leqq \sin^3\alpha \end{aligned}$$

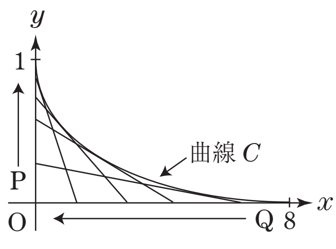
である．また，$Y=\sin^3\alpha$ のときを考えると

$$\begin{aligned} & X\sin^3\alpha - 8\sin^3\alpha\cos^3\alpha = 0 \\ \iff & X = 8\cos^3\alpha \ (\because \sin^3\alpha \fallingdotseq 0) \\ \therefore\ & \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ & \qquad = \left\{1-\left(\frac{X}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

であるから，$Y \leqq \left\{1-\left(\frac{X}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$ である．

（以下，解答と同様）■

最後に，$\boxed{3}$ の手法についてです．まず結果から言うと，今回の線分 PQ は θ の値に関係なく，領域 D の境界線の方程式 $y=\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$ に接しています．このようにパラメータを含む図形が，そのパラメータの変化に対して，ある図形に接しながら動くとき，そのある図形のことを包絡線と言います．この包絡線を利用すると下図のように線分 PQ の通過領域 D を図だけで判断することができます．



さて，ここで肝心なのはこの包絡線をどうやって求めるかですね．一般に，パラメータ t を含む図形の方程式を，t のみを変数とみて $f(t)=0$ とした場合，包絡線は

$$\begin{cases} f(t)=0 \\ f'(t)=0 \end{cases}$$

によって与えられます．この証明は，大学レベルの内容になりますので，この場では割愛します．

今回の場合であれば，（$\boxed{2}$ の手法での解答）における $f(\theta)$ に対して

$$\begin{cases} f(\theta)=0 \\ f'(\theta)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=8\cos^3\theta \\ y=\sin^3\theta \end{cases}$$

と得られます．

しかし，解答にこの部分を書くことは控えた方が良いと思います．解答を書く際には，包絡線の方程式をいきなり持ち出して，その後にちゃんと直線 PQ と接することを確認するという流れで書けば良いです．

（$\boxed{3}$ の手法での解答）

$$\begin{cases} x=8\cos^3\theta \\ y=\sin^3\theta \end{cases}$$

が表す曲線を C とする．

$$\frac{dx}{d\theta} = -24\sin\theta\cos^2\theta,\ \frac{dy}{d\theta} = 3\sin^2\theta\cos\theta$$

より，$\theta \neq 0,\ \frac{\pi}{2}$ のとき

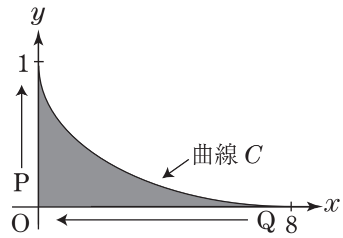
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\sin^2\theta\cos\theta}{-24\sin\theta\cos^2\theta} = -\frac{1}{8}\tan\theta$$

であるから，$\theta=t$ に対応する点における接線の方程式は

$$\begin{aligned} & y = -\frac{1}{8}(\tan t)(x-8\cos^3 t)+\sin^3 t \\ \iff & y = -\frac{1}{8}(\tan t)x + \sin t\cos^2 t + \sin^2 t \\ \iff & y = -\frac{1}{8}(\tan t)x + \sin t \end{aligned}$$

となる．これは $\theta=t$ のときの直線 PQ の方程式なので，直線 PQ は曲線 C に接しながら動くことがわかる．

よって，$\theta=0,\ \frac{\pi}{2}$ のときも考慮すると，領域 D は下図の色つき部分である（境界含む）．



■

1 点補足です．直線を動かす際には，包絡線の凸の向きが大切になります．包絡線が放物線になる場合などを考え

ればわかりやすいと思います．上に凸か，下に凸かによって通過する部分が曲線の上か下かが変わりますね．2 次関数であれば大丈夫なのですが，未知の関数の場合においては，その凸性を 2 階微分して調べる必要があります．

＜体積計算について＞

《解答》では領域 D の境界線の方程式として，α を消去することで，y を x の式で $y=\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$ という風に表しました．しかし，もちろん α（パラメータ）を消去するのが困難なケースもありますので，その場合はパラメータを用いて体積の計算をすることになります．今回の場合，領域 D の境界線は（《解答》の流れより）

$$\begin{cases} x=8\cos^3\alpha \\ y=\sin^3\alpha \end{cases} \left(0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

という形で表すことができますので，体積 V は

$$\begin{aligned} V&=\pi\int_0^8 y^2\,dx \\ &=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6\alpha\cdot(-24\sin\alpha\cos^2\alpha)d\alpha \\ &=24\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha \end{aligned}$$

を計算することによって求めることもできます．計算の続きは以下の通りです．

$$\begin{aligned} V&=24\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha \\ &=24\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)^3\cos^2\alpha\,d\alpha \\ &=-24\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\alpha)'(\cos^2\alpha-3\cos^4\alpha \\ &\qquad\qquad+3\cos^6\alpha-\cos^8\alpha)d\alpha \\ &=-24\pi\Big[\frac{1}{3}\cos^3\alpha-\frac{3}{5}\cos^5\alpha+\frac{3}{7}\cos^7\alpha \\ &\qquad\qquad-\frac{1}{9}\cos^9\alpha\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &=\frac{128}{105}\pi \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ここでは置換をせずに処理しましたが，$\cos\alpha=t$ として置換積分で計算しても構いません．

また，$\sin^7\alpha\cos^2\alpha=\sin^7\alpha-\sin^9\alpha$ と変形できることに注目して求めることもできます．この変形をした際の積分は，漸化式を作る方法で解くのがよいでしょう．解答は以下の通りです．

（別解）

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\alpha\,d\alpha$ とおくと

$$\begin{aligned} I_{n+2}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\alpha\sin\alpha d\alpha \\ &=\left[\sin^{n+1}\alpha(-\cos\alpha)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\qquad-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n+1)\sin^n\alpha\cos\alpha(-\cos\alpha)d\alpha \\ &=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^n\alpha-\sin^{n+2}\alpha)d\alpha \\ &=(n+1)(I_n-I_{n+2}) \end{aligned}$$

$$\therefore\ I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$$

である．よって

$$\begin{aligned} I_7&=\frac{6}{7}I_5=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}I_3=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1 \\ &=\frac{16}{35}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\,d\alpha \\ &=\frac{16}{35} \\ I_9&=\frac{8}{9}I_7=\frac{8}{9}\cdot\frac{16}{35} \end{aligned}$$

であるから，求める体積 V は

$$\begin{aligned} V&=24\pi(I_7-I_9) \\ &=\frac{128}{105}\pi \end{aligned}$$

である．■

いずれにしても，この積分計算はまあまあ大変なので，今回は《解答》のように計算した方が良いと思います．

＜参考＞

最後に，本問に登場した曲線についてですが

$$\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$$

と変形できることから「あっ，あれっぽい」と思った人はいるでしょうか？

これは入試でもたびたびとりあげられる“アステロイド”と呼ばれる曲線を少し変形したものです．一般に，“アステロイド”の方程式は

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\quad(a>0)$$

と表されます．$a=1$ として，x 軸方向に 8 倍拡大したものが今回の曲線です．

《おわりに》

センター試験まで残り１ヶ月となりました．難関国公立大学を目指す上ではあくまで通過点に過ぎませんが，侮ると足元をすくわれますので，万全の態勢で臨んでください．来春を笑顔で迎えられるように, あと少しです, 頑張ってください.

（西村）