強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第 1 問（数 III）

n を自然数とする．0 でない複素数からなる集合 M が次の条件 (I)，(II)，(III) を満たしている．

(I)　集合 M は n 個の要素からなる．

(II)　集合 M の要素 z に対して，$\dfrac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である．

(III)　集合 M の要素 z，w に対して，その積 zw は集合 M の要素である．ただし，$z=w$ の場合も含める．

このとき，次の問に答えよ．

(1)　1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ．

(2)　n は偶数であることを示せ．

(3)　$n=4$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ．

(4)　$n=6$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ．

＜解答＞

(1)　$z \in M$ を任意にとる．$z \fallingdotseq 0$ であり，条件 (II) から $\dfrac{1}{z} \in M$ である．すると条件 (III) から

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1 \in M$$

であり，さらに条件 (II) から

$$-1 \in M$$

である．

(2)　$$z=\frac{1}{z} \iff z=\pm 1$$

であるから，M の要素で 1，-1 と異なるものは z が含まれれば $\dfrac{1}{z} (\fallingdotseq z)$ も含まれ，z と $\dfrac{1}{z}$ のペアが作れる．よって，n (M に含まれる要素の数) は偶数である．

.

(3)　$n=4$ のとき，(1) から

$$M=\left\{1,\ -1,\ z,\ \frac{1}{z}\right\}\ (z \fallingdotseq \pm 1,\ 0)$$

となる．条件 (II) から

$$-z \in M$$

であり，$z \fallingdotseq \pm 1,\ 0$ であるから

$$-z \fallingdotseq \pm 1,\ z$$

である．よって

$$-z=\frac{1}{z} \iff z=\pm i$$

が必要で，逆にこのとき

$$M=\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$$

となり，この M は条件 (I)，(II)，(III) をすべて満たすので十分である．

よって，$n=4$ のとき，集合 M は一通りに定まり，それは

$$M=\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$$

である．

(4)　$n=6$ のとき，(1) から

$$M=\left\{1,\ -1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha},\ \beta,\ \frac{1}{\beta}\right\}$$

(各要素はすべて異なる)

となる．条件 (II) より

$$-\alpha \in M$$

であり，要素がすべて異なりかつ 0 でないことから

$$-\alpha \fallingdotseq 1,\ -1,\ \alpha$$

である．よって

$$-\alpha=\frac{1}{\alpha} \quad \cdots\cdots ①$$

$$-\alpha=\beta \quad \cdots\cdots ②$$

$$-\alpha=\frac{1}{\beta} \quad \cdots\cdots ③$$

のいずれかが成り立つ．

① が成り立つとき，$\alpha=\pm i$ であり

$$M=\left\{1,\ -1,\ i,\ -i,\ \beta,\ \frac{1}{\beta}\right\}$$

である．このとき

$$-\beta \in M$$

であるが

強者の戦略

$-\beta$	1	-1	i	$-i$	β	$\dfrac{1}{\beta}$
β	-1	1	$-i$	i	0	$\pm i$

となり，いずれの場合も β が M のいずれかの要素と一致してしまうので不適である．

② または ③ が成り立つとき

$$M=\left\{1,\ -1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha},\ -\alpha,\ -\frac{1}{\alpha}\right\}$$

である．このとき，条件 (III) より

$$\alpha^2 \in M$$

であるから，下表のようになる．

α^2	1	-1	α	$\dfrac{1}{\alpha}$	$-\alpha$	$-\dfrac{1}{\alpha}$
α	± 1	$\pm i$	$0,\ 1$	$1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$	$0,\ -1$	$-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

このうち，M が条件 (I) を満たすものは

$$\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

のいずれかの場合のときで ($\alpha=\pm i$ のときは $\alpha=-\dfrac{1}{\alpha}$ となり不適)，いずれの場合も

$$M=\left\{1,\ -1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right\}$$

となる．この M は $\zeta=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ として

$$M=\{1,\ \zeta,\ \zeta^2,\ \zeta^3,\ \zeta^4,\ \zeta^5\}$$

と表され，$\zeta^6=1$ より条件 (II)，(III) も満たすので適する．

以上より，$n=6$ のときも集合 M は一通りに定まり，それは

$$M=\left\{1,\ -1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right\}$$

である．

＜解答終＞

＜コメント＞

数学科の川﨑です．今年度も 3 回ほどこのページを担当いたします．よろしくお願いします．

今回は名古屋大学で今年出題された問題を出題しました．複素数の問題です．複素数平面がどの大学でも「出題されて当然」というレベルになってきましたね．人によって学習習熟度に大きく差がある単元だと思います．まだ複素数平面の対策がそれほどできていないという人は，GW や夏休みなどに時間を見つけて取り組むようにしましょう．

以下，設問についての補足です．

(1) 集合 M という得体のしれないものを考えます．その M に 1 と -1 が属することを示します．たまに，「複素数」という言葉の定義が正しく分かっていない人がいます．「i がついてないのに 1 が M に入っていていいの？」などと考えてはいけません．実数と虚数を合わせて複素数と呼びますので 1 や -1 はれっきとした複素数です．話を戻しますが，1 が含まれていることは，条件 (II) の積の逆元 (逆数) が M に含まれることと，条件 (III) の M が積で閉じていることから従います．また，-1 が含まれていることも条件 (II) の和の逆元 (マイナス倍) が M に含まれることから従います．

(2) M の要素の個数 n が偶数であることを示します．ポイントになるのは条件 (II) です．z に対して積の逆元である $\dfrac{1}{z}$ をペアにして考えましょう．

$z=\dfrac{1}{z}$ となるのは $z=1,\ -1$ のときだけですので，これ以外のペアは z と $\dfrac{1}{z}$ が異なります．よって，このペアの数を k とすると，1 と -1 の 2 個分を加えて

$$n=2+2k$$

となり，偶数であることが分かります．なお，解答では積の逆元である $\dfrac{1}{z}$ を使いましたが，和の逆元である $-z$ を使って (z と $-z$ をペアにして考えて) 同様に示すこともできます．

(3) (2) で n が偶数であることが分かりました．

$n=2$ のときは, (1) から $M=\{1,\ -1\}$ となるので, 次に興味があるのは $n=4$ のときになります. このとき, 1, -1 以外の要素 z があるので, それを用いて, $-z$ や $\dfrac{1}{z}$ が M に属する条件を考えます.

解答では $\dfrac{1}{z}$ を M に入れておいて, $-z$ がどれかと一致するという方針で求めました. $-z$ は 1, -1, z のいずれとも異なるので

$$-z=\frac{1}{z}$$

となるしかなく, z が決まります.

(4) $n=2,\ 4$ ときたら, 当然 $n=6$ を考えたくなりますね. 1, -1 でない要素が増えますので $\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha},\ \beta,\ \dfrac{1}{\beta}$ とおきました. そして, (3) 同様 $-\alpha$ や $-\beta$ が M に属さないといけないので, どれと一致するかを考えていきます. 可能性があるのは解答中の ①～③ に絞られることがすぐに分かります.

① のときは, $\alpha=i,\ -i$ となり, このとき $-\beta$ をいずれに一致させたとしても, 条件を満たす M は作れません. 高々 6 個しかないので, すべて調べてもそれほど大変ではありません.

②, ③ のときは, どちらも同じ結果になるのですが

$$M=\left\{1,\ -1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha},\ -\alpha,\ -\frac{1}{\alpha}\right\}$$

と決まります. これで条件 (II) は成り立つようにできました. あとは条件 (III) が成り立つようにすれば OK です. 積について閉じているので $\alpha\cdot\alpha$ や $\alpha\cdot(-\alpha)$ が M に属することから, α の候補を絞ることができます. 解答では, 問題文中の「ただし, $z=w$ の場合も含める」が目に付いたので, α^2 が M の中のどれに一致するかを考えています.

さて, (3) や (4) の答えを見ると, n がもっと大きな偶数になったら M がどうなるか予想できるのではないでしょうか.

(3) $M=\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$ (1 の 4 乗根全体)

(4) $M=\{1,\ \zeta,\ \zeta^2,\ \zeta^3,\ \zeta^4,\ \zeta^5\}$ (1 の 6 乗根全体)

ですので, 一般の偶数 n に対して, M は

1 の n 乗根全体の集合

になるのではないかと予想できます.

実は条件 (II) は無くても, M は 1 の n 乗根全体です. それを示して, (3), (4) の別解を与えます.

<別解> ((3), (4) の一般化)

N を 1 の n 乗根全体の集合とし, 以下, 条件 (I), (III) があるとき, $M=N$ であることを示す.

$$M=\{z_1,\ z_2,\ \cdots\cdots,\ z_n\}$$

とし, 各要素に z_k (k は $1\sim n$ までのいずれか) をかけて

$$\{z_1z_k,\ z_2z_k,\ \cdots\cdots,\ z_nz_k\}$$

という集合を考える. すると, 条件 (III) より, この集合の各要素は M に属し

$$z_jz_k=z_lz_k \iff z_j=z_l\ (\because\ \ z_k\neq 0)$$

より, n 個の要素はすべて異なるので

$$M=\{z_1z_k,\ z_2z_k,\ \cdots\cdots,\ z_nz_k\}$$

である. M に属するすべての要素の積を考えて

$$z_k^n(z_1z_2\cdots\cdots z_n)=z_1z_2\cdots\cdots z_n$$

$$\therefore\ z_k^n=1\ \ (\because\ \ z_1z_2\cdots\cdots z_n\neq 0)$$

である. これより, z_k $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ はいずれも 1 の n 乗根であることが分かり

$$M\subset N$$

である. 条件 (I) より M に属する要素の個数は, N に属する要素の個数 n に等しいので

$$M=N$$

である (この M は条件 (II) も満たす).

<解答終>

また, 集合の要素が少ない場合は, 積について閉じているとき, 以下の解法も有効です.

<(3) の別解>

$n=4$ とする. $z\ (\neq 0)$ を M に属する 1, -1 と異なる要素とすると

$$z,\ z^2,\ z^3,\ z^4,\ z^5$$

はすべて M に属する. M には 4 個の要素しかないので

$$z=1,\ z^2=1,\ z^3=1,\ z^4=1$$

のいずれかが成り立つ．よって，z の候補は

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \pm i$$

に絞られ，このうち，条件を満たすものを考えて

$$M=\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$$

である．

＜解答終＞

(4) でもこの解法で解くことも可能ですが

$$z=1,\ z^2=1,\ z^3=1,\ z^4=1,\ z^5=1,\ z^6=1$$

を考えることになり，やや面倒です．要素の個数が少ない時には有効とおさえておいてください．

※　ここから先は大学数学の話をします．参考まで．

集合 G が，ある演算「$\cdot$」(和や積だと思ってください) をもち，以下の性質を満たすとき，G を「**群** (*group*)」と呼びます．

(i)　G は単位元 e をもつ．
(単位元とは，G の任意の要素 a に対して $a\cdot e=e\cdot a=a$ を満たすもの)

(ii)　G の任意の要素は，逆元をもつ．
(要素 a の逆元とは，$a\cdot b=b\cdot a=e$ となる G の要素 b のこと)

(iii)　G の任意の要素 $a,\ b,\ c$ に対して，
結合法則 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ が成り立つ．

例えば，整数全体の集合は和 (+) について群をなします (単位元は 0 で，a の逆元は $-a$)．しかし，積に関しては逆元が無いので群にはなりません．

演算「$\cdot$」は必ずしも可換 ($a\cdot b=b\cdot a$) である必要はなく，この演算「$\cdot$」が可換な群のことを**アーベル群**と呼びます．群 G に含まれる要素の数が有限のとき，その要素の個数をその群の**位数**と言います．

有限アーベル群には「**有限アーベル群の基本定理**」と呼ばれる構造を決定する定理があります．興味のある人は調べてみてください．

さて，今回の問題に登場した M ですが，条件 (II)，(III) から積についてアーベル群になることが分かります (複素数が要素なので，結合法則の成立や可換性は明らかです．また，和についても逆元の存在が条件 (II) で保証されますが，和について閉じているとは書かれていないので，群にはなりません)．条件 (I) から群 M の位数は n です．さらにある特徴をもった群になっています．

一般に，位数が n (有限値) の群において

$$G=\{1,\ a,\ a^2,\ \cdots\cdots,\ a^{n-1}\}$$

($a\cdot a=a^2$ などと表しています)

と書けるとき，G を**巡回群** (*cyclic group*) と言います．また，a をこの群の生成元 (*generator*) と言います．

本問では，(2) では i，(3) では $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ を生成元とする巡回群が答えになっています (生成元のとり方は他にもあります)．

少しだけ，大学で学ぶことにもつながっているということを感じてもらえれば嬉しいです．

最後に 1 問いつものように練習問題をつけておきます．解説で学んだ解法が使えるかどうか確認してください．

問

相異なる 3 つの 0 以外の複素数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ があり，そのうちどの 2 個の積も (同じ数同士の積も含めて) もとの 3 つの複素数のうちのどれかであるとき，この 3 つの複素数を決定せよ．

＜解答＞

$$M=\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$$

とおく．$\alpha\neq 0$ であり，M が積について閉じていることから

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4$$

のうち，いずれか 2 つは一致する．よって

$$\alpha=1,\ \alpha^2=1,\ \alpha^3=1$$

のうちのいずれかが成り立ち，$\beta,\ \gamma$ についても同様である．よって，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の候補は

$$1,\ -1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

である．$-1\in M$ とすると，$1=(-1)^2\in M$ であり，もう 1 つは $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ のどちらかとなるが，これでは M が積について閉じないので

$$M=\left\{1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right\}$$

である．すなわち

$$\begin{aligned}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=&\left(1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}\right)\\&\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}, 1,\ \frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}\right)\\&\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2},\ 1\right)\end{aligned}$$

(それぞれの ( ) 内では複号同順)

である．

＜解答終＞

いかがだったでしょうか？この問題も

$$\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}=\{\alpha^2,\ \beta\alpha,\ \gamma\alpha\}$$

となることから，$\alpha^3=1$ を導いて解くこともできます．ぜひ試してみてください．

では今回はここまでにしたいと思います．また次回をお楽しみに．

＜数学科　川﨑＞