# 強者の戦略

数学科の横山です．みなさん，今回の問題はいかがだったでしょうか．今回の問題は，具体的に実験を行ってもなかなか方針が見つからず，手が止まった人もいるかと思います．式をうまく変形していくことがポイントとなります．では，早速＜方針＞から見ていきましょう．

> $n$ を自然数とする．次の和を計算せよ．
>
> $$\frac{1}{1!(2n)!}+\frac{1}{2!(2n-1)!}+\frac{1}{3!(2n-2)!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!(n+1)!}$$

＜方針＞

問題文を見てもらえれば，規則を持った数列の和であることは分かると思います．そこで，第 $k$ 項を抜き出すと

$$\frac{1}{k!(2n+1-k)!}$$

となります．ここで，この分数は C( コンビネーション ) の形，つまり

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}={}_n\mathrm{C}_r$$

の形に近いと思いませんか？そこで

$$\frac{1}{k!(2n+1-k)!}=\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!}$$
$$=\frac{1}{(2n+1)!}\cdot{}_{2n+1}\mathrm{C}_k$$

と変形します．

あとは，これの和を取ればよいのですが

Σ と C ( コンビネーション ) の計算

とくれば……「二項定理」ですね．

ここまでくることができれば解けたようなものです．あとは，「二項定理」を利用して，計算していきましょう．

では，＜解答＞です．

＜解答＞

$$\frac{1}{1!(2n)!}+\frac{1}{2!(2n-1)!}+\frac{1}{3!(2n-2)!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!(n+1)!}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!(2n+1-k)!}$$
$$=P$$

とする．

$$\frac{1}{k!(2n+1-k)!}=\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!}$$

であるから

$$P=\frac{1}{(2n+1)!}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!}$$
$$=\frac{1}{(2n+1)!}\sum_{k=1}^{n}{}_{2n+1}\mathrm{C}_k$$

である．ここで，二項定理より

$$(1+1)^{2n+1}={}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_n+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{n+1}+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{n+2}+\cdots\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}$$
$$2^{2n+1}={}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_n+{}_{2n+1}\mathrm{C}_n+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{n-1}+\cdots\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_0$$
$$2^{2n+1}=2\left({}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_n\right)$$
$$=2\left(1+\sum_{k=1}^{n}{}_{2n+1}\mathrm{C}_k\right)$$
$$2^{2n}=1+\sum_{k=1}^{n}{}_{2n+1}\mathrm{C}_k$$
$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}{}_{2n+1}\mathrm{C}_k=2^{2n}-1$$

である．よって

$$P=\frac{1}{(2n+1)!}\cdot(2^{2n}-1)$$
$$=\frac{2^{2n}-1}{(2n+1)!}$$

である．

＜考察＞

今回のテーマは「二項定理」でしたが，1 番のポイントは Σ と C ( コンビネーション ) から「二項定理」を導き出せるかということでしたね．

今回はこの考え方に慣れてもらうために，Σと C( コンビネーション )，Σと！( 階乗 ) の練習問題を用意しましたので，確認してみましょう．

＜練習問題＞

次の和を計算せよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k 2^k$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_{2n}\mathrm{C}_{2k}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k$　　(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!}$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!$

いかがだったでしょうか．方針を確認しておきます．

(1)　$(1+a)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 a^1 + {}_n\mathrm{C}_2 a^2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n a^n$

に $a=2$ を代入すれば解けますね．

(2)　バラバラにすると

$${}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + {}_{2n}\mathrm{C}_4 + \cdots\cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$$

となります．これは

$${}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$$

の奇数番目だけを取り出したものだと分かりますね．ここで，二項定理から

$${}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} = (1+1)^{2n}$$
$${}_{2n}\mathrm{C}_0 - {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 - \cdots\cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} = (1-1)^{2n}$$

の二式を用意して，これらの和を計算します．

(3)　初めに, $k\,{}_n\mathrm{C}_k$ を変形します．C ( コンビネーション ) の前の $k$ を $n$ の形にしてから，二項定理を用いて計算します．

(4)，(5)　部分分数分解のように，差分の形に変形して考えていきます．

では，それぞれの解答を見ていきましょう．

(1)
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k 2^k &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 2^1 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n 2^n \\ &= (1+2)^n \\ &= 3^n\end{aligned}$$

である．

(2)
$$\begin{aligned}&{}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \\ &\cdots\cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1} + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} = (1+1)^{2n} \cdots\cdots ① \\ &{}_{2n}\mathrm{C}_0 - {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 - \\ &\cdots\cdots - {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1} + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} = (1-1)^{2n} \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

であるので，①＋② より

$$2\left({}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}\right) = 2^{2n}$$
$${}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} = 2^{2n-1}$$
$$\therefore \sum_{k=0}^{n} {}_{2n}\mathrm{C}_{2k} = 2^{2n-1}$$

である．

(3)　$k \geqq 1$ において

$$\begin{aligned}k\,{}_n\mathrm{C}_k &= k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!} \\ &= n\cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k &= 0\cdot {}_n\mathrm{C}_0 + \sum_{k=1}^{n} n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \\ &= n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \\ &= n(1+1)^{n-1} \\ &= n\cdot 2^{n-1}\end{aligned}$$

である．

(4)
$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right\} \\ &= \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}\right) + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \\ &\quad \cdots\cdots + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

である．

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n}\{(k+1)!-k!\}$

$=(2!-1!)+(3!-2!)+$

$\cdots\cdots+\{(n+1)!-n!\}$

$=(n+1)!-1$

である．

この＜練習問題＞のレベルの問題なら，見た瞬間に解法が浮かぶようにしておきたいですね．

＜終わりに＞

今回は二項定理やΣとC(コンビネーション)などについて見ていきました．数学では，しっかり思考することが最も大切なことであるとは思いますが，今回の問題からも分かる通り，ある程度の「定石」は頭に入れておくことも大切です．今回の

Σ と C(コンビネーション)→二項定理

も難関大を目指す皆さんにとって必要な「定石」だと思いますので，しっかり頭の中に入れておくようにしましょう．

では，今回はここまでにしたいと思います．お疲れ様でした．

(横山)