強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第 1 問（数 III）

次の問いに答えよ．

(1)　a を定数とし，正の数からなる数列 $\{x_n\}$ は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{x_n+n}-\sqrt{n}\right)=a$ を満たすとする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=2a$ が成り立つことを示せ．

(2)　自然数 L，n に対して

$$\sqrt{L+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<\sqrt{L+n}-\sqrt{n}$$

が成り立つことを示せ．

(3)　b は定数で，$b>1$ とする．自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<b$ を満たす自然数 L の個数を L_n とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{\sqrt{n}}$ を求めよ．

<解答>

(1)　$y_n=\sqrt{x_n+n}-\sqrt{n}$

とおくと

$$y_n+\sqrt{n}=\sqrt{x_n+n}$$

$$\iff y_n^2+2\sqrt{n}y_n+n=x_n+n$$

$$\left(\because\ y_n+\sqrt{n}>0,\ \sqrt{x_n+n}>0\right)$$

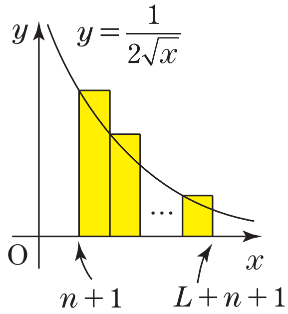
$$\iff \frac{x_n}{\sqrt{n}}=\frac{y_n^2}{\sqrt{n}}+2y_n$$

であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n=a$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=2a$$

である．

(2)　関数 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$ は単調減少であることに注意する．



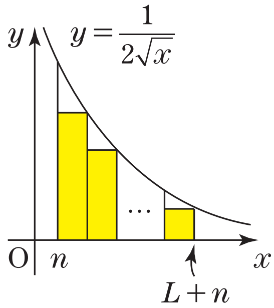
上図で面積を比べて (ただし，長方形の横の長さはすべて 1)

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}>\int_{n+1}^{L+n+1}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$=\Big[\sqrt{x}\Big]_{n+1}^{L+n+1}$$

$$=\sqrt{L+n+1}-\sqrt{n+1}$$

である．



上図で面積を比べて (ただし，長方形の横の長さはすべて 1)

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<\int_{n}^{L+n}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$=\Big[\sqrt{x}\Big]_{n}^{L+n}$$

$$=\sqrt{L+n}-\sqrt{n}$$

である．

以上で示せた．

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}$ は n を固定したとき，L について単調に増加する．よって，L_n の定義より

$$\sum_{k=1}^{L_n}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<b\leqq\sum_{k=1}^{L_n+1}\frac{1}{\sqrt{k+n}}$$

$$\iff \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_n}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<\frac{b}{2}\leqq\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_n+1}\frac{1}{\sqrt{k+n}}\quad\cdots\cdots(*)$$

が成り立つ．ここで (2) より

$$\sqrt{L_n+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_n}\frac{1}{\sqrt{k+n}}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_n+1}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<\sqrt{L_n+1+n}-\sqrt{n}$$

が成り立つので，(*) と合わせて

$$\sqrt{L_n+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{b}{2}$$
$$<\sqrt{L_n+n+1}-\sqrt{n} \quad \cdots\cdots (**)$$

である．

$$L_n=M_{n+1}$$

とすると，(**) より

$$\sqrt{M_{n+1}+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{b}{2}$$
$$<\sqrt{M_{n+1}+n+1}-\sqrt{n+1}+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

であり，これを変形して

$$\frac{b}{2}-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$
$$<\sqrt{M_{n+1}+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{b}{2}$$

である．n を十分大とし，n を 1 つずらすことで

$$\frac{b}{2}-\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$$
$$<\sqrt{M_n+n}-\sqrt{n}<\frac{b}{2} \quad \cdots\cdots (***)$$

である．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$
$$=0$$

であるから，(***) の右辺，左辺は $n\to\infty$ とするとどちらも $\frac{b}{2}$ に収束する．よって，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{M_n+n}-\sqrt{n}\right)=\frac{b}{2}$$

である．$M_n>0$ であるから，(1) より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{\sqrt{n}}=2\cdot\frac{b}{2}=b$$

であり

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{M_{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{M_{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$$
$$=b$$

である．

＜解答終＞

＜コメント＞

数学科の川﨑です．今回の問題はいかがだったでしょうか．(3) は難しかったと思います．(1)，(2) をどう使うか考えるところが勉強になりますね．

以下，設問毎に補足を述べます．

(1)　与えられている $\sqrt{x_n+n}-\sqrt{n}$ から，$\frac{x_n}{\sqrt{n}}$ をどう作るかの勝負です．解答中では

$$y_n=\sqrt{x_n+n}-\sqrt{n}$$

とおき，「x_n を y_n で表す」という方針で変形しました．これが分かり良いと思います．**「極限が分かっているものをかたまりで置く」**というのは極限計算の常套手段です．しっかりおさえておきましょう．

少し遠回りですが，次のように解くこともできます．

＜ (1) の別解＞

$$\sqrt{x_n+n}-\sqrt{n}=\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{x_n}{n}+1}-1\right)$$

であり，これが有限確定値に収束するので

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x_n}{n}+1}-1\right)=0$$

すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$$

が成り立つ．ここで，有理化を考えることで

$$x_n=\left(\sqrt{x_n+n}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{x_n+n}+\sqrt{n}\right)$$

であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}&=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{x_n+n}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{\frac{x_n}{n}+1}+1\right)\\&=2a\end{aligned}$$

である．

＜別解終＞

(2)　示す不等式の中辺に着目します．このシグマが計算できるかを考えますが，不可能なのはすぐに分かると思います．ここで思い浮かぶようにしたいのが

$\sum f(k)$　→　$y=f(x)$ **のグラフで面積評価**

という解法です．本問は

$$\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

となるので，積分区間をうまく調整したら，示す不等式の左辺・右辺の形を作れそうです．面積評価は図のように幅 1 の長方形の面積の和として不等式を作るのが普通ですが，さらに評価の精度を上げるために台形で近似することもあります．これらをテーマにした問題は，当ページでも過去に第 136 回，第 224 回などで出題しています (私の好きなテーマであることがバレますね笑)．そちらも合わせて参照してください．

解答中，**「単調性」**から不等式が導かれること，**「面積」**を比べていることは明記するようにしましょう．

なお，(2) にも別解があります．面積を表に出さず，差分を作って和を作る方法です．

＜ (2) の別解＞

自然数 n，k に対して

$$\begin{aligned}\sqrt{n+k+1}-\sqrt{n+k}&=\frac{1}{\sqrt{n+k+1}+\sqrt{n+k}}\\&<\frac{1}{2\sqrt{n+k}}\end{aligned}$$

が成り立つ．これを $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L$ として加えて

$$\sqrt{L+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}$$

を得る．同様に

$$\begin{aligned}\sqrt{n+k}-\sqrt{n+k-1}&=\frac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n+k-1}}\\&>\frac{1}{2\sqrt{n+k}}\end{aligned}$$

が成り立つので，これを $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L$ として加えて

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<\sqrt{L+n}-\sqrt{n}$$

を得る．以上で示せた．

＜別解終＞

(3)　本問のメインです．実際の入試でこれが解ければ周りより一歩リードできると思います．

難しいのは，L_n の評価です．不等式のヒントは (2) にあるので，ここからはさみうちを狙いましょう．L_n は「個数」で定義されますが，与えられた不等式の左辺が単調増加であることから，**「この不等式を満たす最大の自然数」**と言い換えることができます．この言い換えがポイントです．「最大」ということは，L_n+1 はこの不等式を満たさないので，解答中の (*) が導けます．これが導ければ，視界がかなり開けます．シグマは邪魔ですので，(2) の不等式を下からと上からと両方使って，L_n の不等式を作りましょう．すると，あと使えるものは何か分かりますね．そうです，(1) です．$n+1$ を n になるよう番号をずらす必要がありますが，無事はさみうちの原理で答えを得ます．

このような，小問に分かれた問題では，誘導の意味を考えることが非常に重要です．最後に，そんな誘導がかけられた問題をもう一問出題します．うまく誘導に乗れた時に得られる満足感は何物にも替えがたいですので，是非味わってください．

問

$x>0$ において，関数 $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $f'(2)$ を求め，$x>2$ のとき $f'(x)<1$ であることを示せ．

(2) k が自然数のとき，$f'\left(\dfrac{1}{k}\right)$ を求めよ．

(3) $f'(x)=1$ となる x の値を大きいものから順に x_1，x_2，x_3，…… とおく．$n\geqq 2$ である自然数 n に対して

$$\frac{1}{n}<x_n<\frac{1}{n-1}$$

であることを示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ を求めよ．

＜解答＞

(1) $x>0$ において

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sin\frac{\pi}{x}+x\cdot\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)\cos\frac{\pi}{x}\\&=\sin\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}\end{aligned}$$

である．よって

$$f'(2)=\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=1$$

である．また

$$\begin{aligned}f''(x)&=-\frac{\pi}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}-\frac{\pi^2}{x^3}\sin\frac{\pi}{x}\\&=-\frac{\pi^2}{x^3}\sin\frac{\pi}{x}\end{aligned}$$

であり，$x>2$ のとき

$$0<\frac{\pi}{x}<\frac{\pi}{2}$$

より

$$\sin\frac{\pi}{x}>0$$
$$\therefore\ f''(x)<0$$

である．したがって，$x>2$ で $f'(x)$ は単調減少で

$$f'(x)<f'(2)=1$$

が成り立つ．

(2) 自然数 k に対して

$$\begin{aligned}f'\left(\frac{1}{k}\right)&=\sin k\pi-k\pi\cos k\pi\\&=(-1)^{k+1}k\pi\end{aligned}$$

である．

(3) (1) より

$$x_1=2$$

である．

また，区間 $1\leqq x<2$ において，$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{x}\leqq\pi$ より (1) の計算から $f''(x)\leqq 0$ である．よって，この区間で $f'(x)$ は単調に減少するので

$$f'(x)>f'(2)=1$$

となり，$f'(x)=1$ となる x は存在しない．

次に，$n\geqq 2$ である自然数 n に対して，区間 $\dfrac{1}{n}<x<\dfrac{1}{n-1}$ で考える．(2) より

$$f'\left(\frac{1}{n}\right)=(-1)^{n+1}n\pi$$
$$f'\left(\frac{1}{n-1}\right)=(-1)^{n}(n-1)\pi$$

である．これらはともに 0 ではなく，異符号で，かつ絶対値がともに 1 より大きい．さらに，この区間で $(n-1)\pi<\dfrac{\pi}{x}<n\pi$ より $f''(x)$ は定符号であるから，$f'(x)$ は単調増加もしくは単調減少である．よって，2 以上の自然数 n に対して，各 n ごとに区間 $\dfrac{1}{n}<x<\dfrac{1}{n-1}$ において，$f'(x)=1$ となる x がただ 1 つ存在する．

以上より

$$\frac{1}{n}<x_n<\frac{1}{n-1}$$

が成り立つ.

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}=0$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

である.

$$0\leqq|f(x_n)|\leqq|x_n|\left|\sin\frac{\pi}{x_n}\right|\leqq|x_n|$$

であり

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=0$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}|f(x_n)|=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}f(x_n)=0$$

である.

＜解答終＞

いかがだったでしょうか？この問題は (3) の議論が鍵ですね．区間を $\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n-1}$ に限ることで，$f''(x)$ が定符号になるのがポイントです．うまく誘導に乗ってください.

では今回はここまでにしたいと思います．また次回お楽しみに.

＜数学科　川﨑＞