強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第 1 問（数 III）

yz 平面の直線 $y=z$ を l_1，直線 $y=z+\sqrt{2}$ を l_2 とする．xyz 空間において，l_1 を軸にして l_2 を回転してできる円柱面 (内部は含まない) を C とする．さらに z 軸を軸として C を回転してできる立体を R とする．

(1)　xy 平面で C を切った切り口に現れる楕円の方程式を求めよ．

(2)　R の yz 平面による断面を図示せよ．

(3)　R の $-2 \leqq z \leqq 2$ の部分の体積を求めよ．

＜解答＞

(1)　直線 l_1 と直線 l_2 の距離は

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1$$

である．

C 上の点 A$(X,\ Y,\ Z)$ に対して，点 A から直線 l_1 に下ろした垂線の足を H とする．直線 l_1 の方向ベクトルとして

$$\vec{l} = (0,\ 1,\ 1)$$

をとる．正射影ベクトルの公式から

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\vec{l} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\vec{l}\right|^2}\vec{l} = \frac{Y+Z}{2}(0,\ 1,\ 1)$$

であり

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \frac{Y+Z}{2}(0,\ 1,\ 1) - (X,\ Y,\ Z) \\ &= \left(-X,\ \frac{-Y+Z}{2},\ \frac{Y-Z}{2}\right) \end{aligned}$$

である．$\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| = 1$ より

$$X^2 + 2\left(\frac{Y-Z}{2}\right)^2 = 1$$

である．よって，円柱面 C の方程式は

$$2x^2 + (y-z)^2 = 2 \quad \cdots\cdots ①$$

である．ゆえに，C を xy 平面 $(z=0)$ で切った切り口の楕円の方程式は

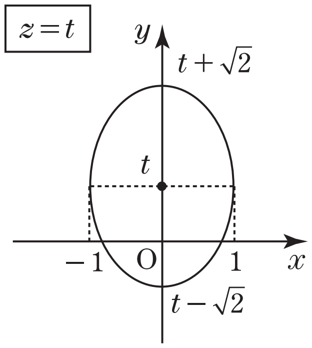
$$2x^2 + y^2 = 2 \iff x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$

である．

(2)　円柱面 C を平面 $z=t$ で切った断面の方程式は，① より

$$2x^2 + (y-t)^2 = 2 \iff x^2 + \frac{(y-t)^2}{2} = 1$$

である (これは平面 $z=t$ 上の楕円を表す).



$$t - \sqrt{2} \leqq y \leqq t + \sqrt{2} \quad \cdots\cdots ②$$

である．xy 平面に関する対称性から $t \geqq 0$ で考える．

楕円上の点 $(x,\ y,\ t)$ と $(0,\ 0,\ t)$ との距離を d とすると

$$\begin{aligned} d^2 &= x^2 + y^2 \\ &= 1 - \frac{(y-t)^2}{2} + y^2 \\ &= \frac{1}{2}y^2 + ty - \frac{1}{2}t^2 + 1 \\ &= \frac{1}{2}(y+t)^2 - t^2 + 1 \end{aligned}$$

である (この右辺を $f(y)$ とおく).② における $f(y)$ の最大値を M，最小値を m とすると，$t \geqq 0$ より $-t \leqq \dfrac{(t-\sqrt{2})+(t+\sqrt{2})}{2}$ に注意して

$$M = f(t+\sqrt{2}) = (t+\sqrt{2})^2$$

である．また

・$t-\sqrt{2} \leqq -t$　すなわち　$0 \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき

$$m=f(-t)=-t^2+1$$

・$-t \leqq t-\sqrt{2}$　すなわち　$\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq t$ のとき

$$m=f(t-\sqrt{2})=(t-\sqrt{2})^2$$

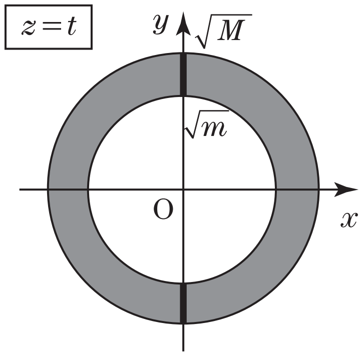
である．

平面 $z=t$ における R の断面は，中心 $(0,\ 0,\ t)$，半径

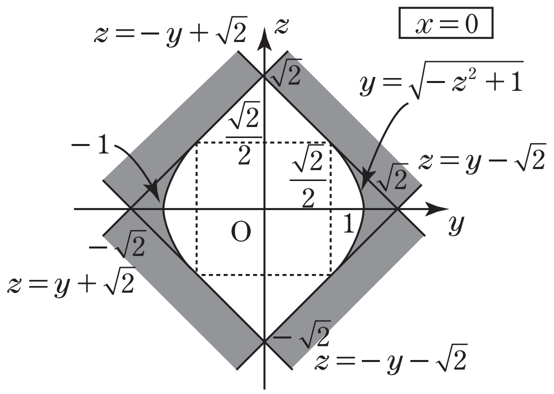
$$\sqrt{M}=t+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{m}=\begin{cases}\sqrt{-t^2+1} & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \left|t-\sqrt{2}\right| & \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq t\right)\end{cases}$$

である 2 つの円で作られる円環である ($t=\sqrt{2}$ のときは，$m=0$ より円である).



この円環と yz 平面の交わりは上図の太線部分になる．t を動かし，xy 平面に関する対称性も考慮して，R の yz 平面における断面図は下図のようになる．



(境界線を含む)

(3)　求める体積を V とする．(2) の円環の面積を考えて，xy 平面に関する対称性も考慮すると

$$\begin{aligned}V&=2\pi\left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\{(t+\sqrt{2})^2-(1-t^2)\}dt\right.\\&\qquad\left.+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2}\{(t+\sqrt{2})^2-(t-\sqrt{2})^2\}dt\right)\\&=2\pi\left(\left[\frac{1}{3}(t+\sqrt{2})^3\right]_0^2-\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right.\\&\qquad\left.-\left[\frac{1}{3}(t-\sqrt{2})^3\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^2\right)\\&=\frac{49\sqrt{2}}{3}\pi\end{aligned}$$

である．

＜解答終＞

＜コメント＞

数学科の川﨑です．今回の問題はいかがだったでしょうか.「斜めになっている円柱を回すとどうなるか？」という問題でした．図形がイメージしにくいですが，定石にのっとって処理することで，正答を得ることができます.

以下，設問ごとの補足を述べます.

(1)　円柱面 C を平面で切断した断面を考える問題です．これは円柱面の方程式を出して xy 平面の方程式 $z=0$ と連立するのが速いでしょう.「円柱面の方程式なんか出したことがないよ」と戸惑う人もいるかもしれませんが，回転体の基本である

「回転の中心からの距離が一定」

を立式すれば解決します．解答中の垂線の足 H が回転の中心であり，これを求めようとするのは自然な発想です.

(2)　この小問が勝負を分ける小問です．というのは，この (2) を正しく解ける人は，(3) でも点数を取ってくるからです.

「斜めの円柱を回すとか，立体のイメージができないから無理！」とあきらめるのではなく，基本に立ち返りましょう．必要なのは立体ではなく

断面です．そして断面を考える際のポイントは

「回す前に切る」

です．回した後に切ろうとすると，立体のイメージが必要になります．空間把握能力を本番でいかんなく発揮できる人は一握りでしょうし，少なくとも私には出来ません．

というわけで，円柱面を回す前に切っておきます．どの向きに切るかは

「回転軸に垂直に」

と覚えておけば良いです．回転体を回転軸に垂直に切った切り口は円または円環になります．この問題では z 軸を軸として回すので，平面 $z=t$ で切ることになります．対称性から $t \geqq 0$ として構いません．すると (1) と同様にすることで，切り口は楕円になります．これを $(0,\ 0,\ t)$ を回転の中心として回すと円環 ($t=\sqrt{2}$ のときは円) ができます．この円環と yz 平面の交わりを見ることで，回転体 R の断面が分かってきます．少し詳しく説明すると，2 ページにある円環で，y 座標が最大の点は

$$(0,\ t+\sqrt{2},\ t)$$

です．この点の軌跡を考えましょう．$t \geqq 0$ の範囲で動かすと

$$y=t+\sqrt{2},\ z=t,\ t \geqq 0$$

から t を消去して

$$z=y-\sqrt{2}\quad (z \geqq 0)$$

となります．これが，この点の軌跡です．このように端点の軌跡を正しく求めることで，R の断面を調べます．

(3)　先にも述べたように，(2) が正しく出来ている人にとっては，この小問は単なる計算問題です．(2) で，平面 $z=t$ での断面が円環 (または円) であることを確認していますので，あとはその断面積を積分すれば体積が得られます．対称性を使って計算量を減らしましょう．

今回も，最後に 1 問練習問題をつけておきます．回転体のまとめにどうぞ．

問

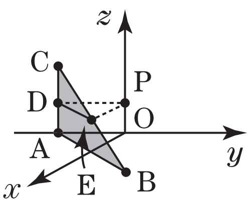
O を原点とする座標空間内の 3 点 A，B，C を A$(0,\ -1,\ 0)$，B$(2,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ -1,\ 1)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　k を 0 以上 1 以下の定数とする．三角形 ABC を平面 $z=k$ で切ったとき，切り口の線分上の点と，点 P$(0,\ 0,\ k)$ との距離の最大値と最小値を求めよ．

(2)　三角形 ABC を z 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

<解答>

(1)



上図のように，平面 $z=k$ と線分 AC，BC の交点をそれぞれ D，E とする．

$$\mathrm{D}(0,\ -1,\ k)$$

であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ &=(2,\ 1,\ 0)+k(-2,\ -2,\ 1)\\ &=(2-2k,\ 1-2k,\ k)\end{aligned}$$

より

$$\mathrm{E}(2-2k,\ 1-2k,\ k)$$

である．これより，直線 DE の方向ベクトルとして

$$\vec{l}=(1,\ 1,\ 0)$$

がとれて

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=(2-2k)\vec{l}$$

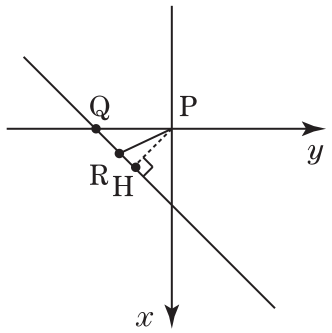
である．

点 P から直線 DE に下ろした垂線の足を H とすると，正射影ベクトルの公式から

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|^2}\vec{l}=\frac{1}{2}\vec{l}$$

である.

(i)　$0 \leqq 2-2k \leqq \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{3}{4} \leqq k \leqq 1$ のとき

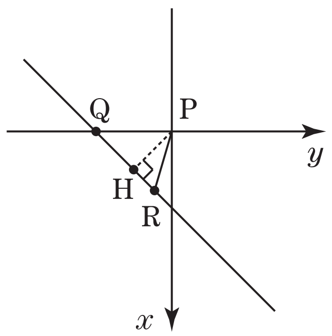


最大値：$\mathrm{PQ}=1$

最小値：$\mathrm{PR}=\sqrt{8k^2-12k+5}$

である.

(ii)　$\dfrac{1}{2} \leqq 2-2k \leqq 1 \iff \dfrac{1}{2} \leqq k \leqq \dfrac{3}{4}$ のとき

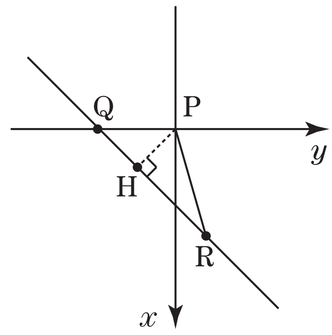


最大値：$\mathrm{PQ}=1$

最小値：$\mathrm{PH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

である.

(iii)　$1 \leqq 2-2k \leqq 2 \iff 0 \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき



最大値：$\mathrm{PR}=\sqrt{8k^2-12k+5}$

最小値：$\mathrm{PH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

である.

(2)　(1) より，求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{(8k^2-12k+5)-\frac{1}{2}\right\}dk\\
&\quad+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\left(1-\frac{1}{2}\right)dk\\
&\quad\quad+\pi\int_{\frac{3}{4}}^{1}\{1-(8k^2-12k+5)\}dk\\
&=\pi\left[\frac{8}{3}k^3-6k^2+\frac{9}{2}k\right]_0^{\frac{1}{2}}+\frac{\pi}{8}\\
&\quad+\pi\left[-\frac{8}{3}k^3+6k^2-4k\right]_{\frac{3}{4}}^{1}\\
&=\frac{31}{24}\pi
\end{aligned}$$

である.

＜解答終＞

3 つの場合分け，気付けましたか？ 1 つでも見落とすと失敗してしまうので慎重に考えましょう.

それでは今回はここまでにしたいと思います．受験生の皆さん，本番で実力が発揮できることを祈ります．しっかり戦い抜いてきてください．春に笑って会えることを楽しみにしています.

＜数学科　川﨑＞