強者の戦略

数学科の横山です．みなさん，今回の問題はいかがだったでしょうか．今回の問題は，(1)，(2) で如何に規則性を見つけることができるかという問題です．また，解答の書き方も難しいと思いますので，その点も合わせて見てもらえると良いかと思います．では，早速＜方針＞から見ていきましょう．

> n を 4 以上の自然数とする．和が n となる 2 つ以上の自然数の組合せを考え，その積の最大値を $M(n)$ とおく．例えば，$n=4$ のとき，和が n となる自然数の組合せは (1，1，1，1)，(2，1，1)，(3，1)，(2，2) があるが，この積の最大値は $2\times2=4$ の時であるから $M(4)=4$ となる．次の問いに答えよ．
> (1)　$M(8)$ を求めよ．
> (2)　$M(12)$ を求めよ．
> (3)　$M(n)$ を求めよ．

＜方針＞

入試問題でよくある流れで，(1) は具体的な数字を使っての計算です．手を動かして組を書き出し，積の最も大きくなるものを見つけてください．この際に，(2)，(3) のために $M(8)$ のみではなく，$M(5)$，$M(6)$，$M(7)$ あたりも考えてみると規則が見つけやすくなると思います．

(2) は (1) のように具体的に書き出すには，量が膨大になると思いますので，頭の中で，明らかに積が最大になりそうにないものはカットしていくと思います．その際に

・5 以上の数をそのままにしない
　($2k$ なら $k+k$ へ，$2k+1$ なら $k+(k+1)$ へ)
・4 以下の数については
　4 → 2＋2　または　4 そのまま
　3 → 3 そのまま
　2 → 2 そのまま

などの規則が見えてくれば，解けたも同然です．このことを証明し，「2，3 のみを用いて表す」という方針から「2，3 のみを用いて表し，できるだけ 3 を多く使う」ということまで分かれば $M(12)$ を求めることができます．

(3) は一般化された問題ですが，(2) で大筋は見えていると思いますので，n を 3 で割った時の余りで場合分けをして考えれば良いことは分かると思います．では，＜解答＞です．

＜解答＞

(1)　8 を 2 個以上の自然数に分けたとき

(7，1)，(6，2)，(5，3)，(4，4)，(6，1，1)
(5，2，1)，(4，3，1)，(4，2，2)，(3，3，2)
(5，1，1，1)，(4，2，1，1)，(3，3，1，1)
(3，2，2，1)，(2，2，2，2)，(4，1，1，1，1)
(3，2，1，1，1)，(2，2，2，1，1)
(3，1，1，1，1，1)，(2，2，1，1，1，1)
(2，1，1，1，1，1，1)
(1，1，1，1，1，1，1，1)

の組がある．よって，$M(8)$ は (3，3，2) のとき

最大値　$3\times3\times2=18$

をとる．

(2)　6 以上の偶数 $2k(k\geqq3)$ について

$$k\times k-2k=k(k-2)>0$$

であるので，$2k$ を $(k,\ k)$ の組に分けたほうが積は大きくなる．

5 以上の奇数 $2k+1(k\geqq2)$ について

$$(k+1)k-(2k+1)=k(k-1)-1>0$$

であるので，$2k+1$ を $(k,\ k+1)$ の組に分けたほうが積は大きくなる．

また，4 を 1 個以上の自然数の和に分けたとき，積は 4 のまま，または，(2，2) のときが最大であり，最大値 4 をとる．3 を 1 個以上の自然数の和に分けたとき，積は 3 のままのときが最大であり，最大値 3 をとる．2 を 1 個以上の自然数の和に分けたとき，積は 2 のままのときが最大であり，最大値 2 をとる．

以上より，$M(n)$ の積が最大となるのは n を 2, 3, のみの和で表したときである．

強者の戦略

また，$M(6)$ について

$$2\times2\times2<3\times3$$

であるので，$M(n)$ は2，3のみを用いて表し，かつ，3をできるだけ多く用いたときが最大になると言える．

よって，$n=12$ のとき

$$\begin{aligned}12&=6+6\\&=3+3+3+3\end{aligned}$$

であるので，$M(12)$ は $(3,\ 3,\ 3,\ 3)$ のとき

最大値　$3\times3\times3\times=81$

をとる．

(3)　(2) と同様に考えて

(i)　$n=3l-2$ (l は自然数) のとき

$M(n)$ は $(3,\ 3,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 3,\ 2,\ 2)$(3 は $l-2$ 個) のとき

最大値　$3\times3\times\cdots\cdots\times3\times2\times2=2^2\cdot3^{l-2}$

をとる．

(ii)　$n=3l-1$ (l は自然数) のとき

$M(n)$ は $(3,\ 3,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 3,\ 2)$(3 は $l-1$ 個) のとき

最大値　$3\times3\times\cdots\cdots\times3\times2=2\cdot3^{l-1}$

をとる．

(iii)　$n=3l$ (l は自然数) のとき

$M(n)$ は $(3,\ 3,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 3)$(3 は l 個) のとき

最大値　$3\times3\times\cdots\cdots\times3=3^l$

をとる．

＜終わりに＞

今回は一見，単純そうな和と積の関係の入試問題でしたが，実際に考えてみると難しかったのではないかと思います．手を動かして「実験」することで条件の「規則」を掴み，その規則を一般化するために「証明する」という入試問題を考える上では，王道の流れだったと思います．分かってはいても，手を動かすことを忘れていたり，一般化する証明が抜けていたりするものだと思いますので，改めて意識しておいてもらいたいと思います．

では，今回はここまでにしたいと思います．お疲れ様でした．

(横山)