数学科の笹谷です．今回は複素数，極限の融合問題です．

問題

i を虚数単位とする．

(1)　$(1+i)^7 = \boxed{\text{ア}}$

(2)　$(\sqrt{x}+i)^7$ の虚部は x の 3 次多項式 $\boxed{\text{イ}}$ である．ただし，$\boxed{\text{イ}}$ は降べきの順に整理して答えよ．

(3)　$(\cos\theta + i\sin\theta)^7$ が実数のとき，$\theta = \boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}}$ である．ただし，

$0 < \boxed{\text{ウ}} < \boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{オ}} < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(4)　$a = \tan\boxed{\text{ウ}}$，$b = \tan\boxed{\text{エ}}$，$c = \tan\boxed{\text{オ}}$ とおき，多項式 $\boxed{\text{イ}}$ を因数分解すると

$$\boxed{\text{イ}} = \boxed{\text{カ}}(x - \boxed{\text{キ}})(x - \boxed{\text{ク}})(x - \boxed{\text{ケ}})$$

となる．ただし，$\boxed{\text{キ}}$ は a を，$\boxed{\text{ク}}$ は b を，$\boxed{\text{ケ}}$ は c を用いて表せ．

(5)　n は自然数のとき $(\sqrt{x}+i)^{2n+1}$ の虚部は x の n 次多項式になる．この多項式の n 次の係数は $\boxed{\text{コ}}$，$(n-1)$ 次の係数は $\boxed{\text{サ}}$ である．したがって

$$\frac{1}{\tan^2\dfrac{1}{2n+1}\pi} + \frac{1}{\tan^2\dfrac{2}{2n+1}\pi} + \cdots + \frac{1}{\tan^2\dfrac{n}{2n+1}\pi} = \boxed{\text{シ}}$$

(6)　$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin\theta < \theta < \tan\theta$ より $\dfrac{1}{\tan^2\theta} < \dfrac{1}{\theta^2} < \dfrac{1}{\sin^2\theta}$ が成り立ち，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \boxed{\text{ス}}$$

を得る．