強者の戦略

今回は，複素数，極限の融合問題でした．
再掲します．

i を虚数単位とする．

(1)　$(1+i)^7=\boxed{\text{ア}}$

(2)　$(\sqrt{x}+i)^7$ の虚部は x の 3 次多項式

$\boxed{\text{イ}}$ である．ただし，$\boxed{\text{イ}}$ は降べきの順に整理して答えよ．

(3)　$(\cos\theta+i\sin\theta)^7$ が実数のとき，

$\theta=\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ である．ただし，

$0<\boxed{\text{ウ}}<\boxed{\text{エ}}<\boxed{\text{オ}}<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(4)　$a=\tan\boxed{\text{ウ}}$，$b=\tan\boxed{\text{エ}}$，

$c=\tan\boxed{\text{オ}}$ とおき，多項式 $\boxed{\text{イ}}$ を因数分解すると

$\boxed{\text{イ}}=$

$\boxed{\text{カ}}(x-\boxed{\text{キ}})(x-\boxed{\text{ク}})(x-\boxed{\text{ケ}})$

となる．ただし，$\boxed{\text{キ}}$ は a を，$\boxed{\text{ク}}$ は b を，$\boxed{\text{ケ}}$ は c を用いて表せ．

(5)　n は自然数のとき $(\sqrt{x}+i)^{2n+1}$ の虚部は x の n 次多項式になる．この多項式の n 次の係数は $\boxed{\text{コ}}$，$(n-1)$ 次の係数は $\boxed{\text{サ}}$ である．したがって

$$\frac{1}{\tan^2\dfrac{1}{2n+1}\pi}+\frac{1}{\tan^2\dfrac{2}{2n+1}\pi}+\cdots+\frac{1}{\tan^2\dfrac{n}{2n+1}\pi}=\boxed{\text{シ}}$$

(6)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin\theta<\theta<\tan\theta$ より

$\dfrac{1}{\tan^2\theta}<\dfrac{1}{\theta^2}<\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ が成り立ち，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\boxed{\text{ス}}$$

を得る．

《考え方と略解》

長い問題文ですが，1 つ 1 つ細かい誘導がついています．それに沿って丁寧に計算していけば，最後の小問までたどり着けるはずです．

(1) は地道に展開してもできますが，極形式を利用する方が楽です．

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ですから，$de\,Moivre$ の定理を用いて

$$\begin{aligned}(1+i)^7&=\left(\sqrt{2}\right)^7\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)\\&=8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\\&=8-8i\end{aligned}$$

となります．

(2) は虚部を x の 3 次式で表したいので，二項定理で展開しましょう．

$$(\sqrt{x}+i)^7=\sum_{k=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_k(\sqrt{x})^{7-k}i^k$$

の虚部は，$k=1$，3，5，7 の分を考えて

$$\begin{aligned}&{}_7\mathrm{C}_1(\sqrt{x})^6+{}_7\mathrm{C}_3(\sqrt{x})^4i^2+{}_7\mathrm{C}_5(\sqrt{x})^2i^4+{}_7\mathrm{C}_7i^6\\&=7x^3-35x^2+21x-1\end{aligned}$$

となります．

(3) は実数となるための条件を，（虚部）$=0$ と捉えて計算します．再び *de Moivre* の定理から

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^7=\cos 7\theta+i\sin 7\theta$$

ですから，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に注意して

$$7\theta=k\pi\ \ (k=1,\ 2,\ 3)$$

です．よって

$$\theta=\frac{\pi}{7},\ \frac{2}{7}\pi,\ \frac{3}{7}\pi$$

となります．

(4) は (2) と (3) を利用します．(1) と同じように $(\sqrt{x}+i)^7$ をあえて極形式で表して，虚部を比べることにより，因数分解の手がかりを探ります．
3 次方程式の解を利用することがポイントです．

$$\sqrt{x}+i=\sqrt{x+1}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}+i\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$$

ですから

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}},\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

と考えてみましょう．どちらも正ですから

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

として大丈夫です．このとき

$$\sqrt{x}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

ですから

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}+i)^7&=\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+i\right)^7\\&=\frac{1}{\sin^7\theta}(\cos\theta+i\sin\theta)^7\\&=\frac{1}{\sin^7\theta}(\cos 7\theta+i\sin 7\theta)\end{aligned}$$

となります．この虚部が (2) の 3 次式と一致することから

$$7x^3-35x^2+21x-1=\frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$$

が成り立ちます．

$\theta=\dfrac{\pi}{7},\ \dfrac{2}{7}\pi,\ \dfrac{3}{7}\pi$ を代入すると

$$7x^3-35x^2+21x-1=0 \quad \cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つことから

$$x=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\tan^2\theta}$$

に $\theta=\dfrac{\pi}{7},\ \dfrac{2}{7}\pi,\ \dfrac{3}{7}\pi$ を代入したもの，すなわち

$$x=\frac{1}{a^2},\ \frac{1}{b^2},\ \frac{1}{c^2}$$

は，$(*)$ の 3 つの解になります．したがって

$$\begin{aligned}&7x^3-35x^2+21x-1\\&=7\left(x-\frac{1}{a^2}\right)\left(x-\frac{1}{b^2}\right)\left(x-\frac{1}{c^2}\right)\end{aligned}$$

となります．

(5) は (4) までの問題を一般化した問いです．

$$(\sqrt{x}+i)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}{}_{2n+1}\mathrm{C}_k(\sqrt{x})^{2n+1-k}i^k$$

を二項定理で展開して，虚部を見ます．

$k=1,\ 3,\ \cdots\cdots\cdots$ の項を見ると

$$\begin{aligned}&{}_{2n+1}\mathrm{C}_1(\sqrt{x})^{2n}+{}_{2n+1}\mathrm{C}_3(\sqrt{x})^{2n-2}i^2+\cdots\cdots\cdots\\&={}_{2n+1}\mathrm{C}_1x^n-{}_{2n+1}\mathrm{C}_3x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

ですから，x^n，x^{n-1} の係数はそれぞれ

$$2n+1,\ -\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$$

です．(4) と同じようにして

$$\theta_k=\frac{k\pi}{2n+1}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots,\ n)$$

に対して

$$a_k=\tan\theta_k$$

とおけば，n 次方程式

$$(\ (\sqrt{x}+i)^{2n+1}\ \text{の虚部}\ )=0$$

の n 個の解が

$$x=\frac{1}{{a_1}^2},\ \frac{1}{{a_2}^2},\ \cdots\cdots\cdots,\ \frac{1}{{a_n}^2}$$

になります．

ここで，解と係数の関係を用いると

$$\frac{1}{{a_1}^2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{{a_n}^2}=\frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_3}{{}_{2n+1}\mathrm{C}_1}=\frac{n(2n-1)}{3}$$

となるので

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}=\frac{n(2n-1)}{3}$$

です．

(4) までの議論の流れが把握できていれば，同じようにしていけるはず．このように，具体的な次数の低い例から，一般的な法則を読み取っていく力は是非身に付けたいところです．

(6) はヒントを上手く使って，はさみうちの原理に持ち込みます．$\dfrac{1}{\tan^2\theta_k}$ の和については，(5) でやっていますから，これを使います．問題は右辺の $\dfrac{1}{\sin^2\theta_k}$ です．これを何とか計算したいです．

ここでは

$$\frac{1}{\sin^2\theta_k}=\frac{\sin^2\theta_k+\cos^2\theta_k}{\sin^2\theta_k}=1+\frac{1}{\tan^2\theta_k}$$

と変形し，$\dfrac{1}{\tan^2\theta_k}$ の和に帰着するのがよいでしょう．

$$\frac{1}{\tan^2\theta_k}<\frac{1}{{\theta_k}^2}<\frac{1}{\sin^2\theta_k}=1+\frac{1}{\tan^2\theta_k}$$

から，各辺 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\cdots,\ n$ として和をとって

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\theta_k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{{\theta_k}^2}<\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta_k}\right)$$

とします．(5) の結論から

$$\frac{n(2n-1)}{3}<\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<n+\frac{n(2n-1)}{3}$$

となるので

$$\frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{\pi^2 n}{(2n+1)^2}+\frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2}$$

となります．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi^2 n}{(2n+1)^2}+\frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

ですから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

となります．

以上から，解答は次のようになります．

$\boxed{\text{ア}}$：$8-8i$，$\boxed{\text{イ}}$：$7x^3-35x^2+21x-1$

$\boxed{\text{ウ}}$：$\dfrac{\pi}{7}$，$\boxed{\text{エ}}$：$\dfrac{2}{7}\pi$，$\boxed{\text{オ}}$：$\dfrac{3}{7}\pi$

$\boxed{\text{カ}}$：7，$\boxed{\text{キ}}$：$\dfrac{1}{a^2}$，$\boxed{\text{ク}}$：$\dfrac{1}{b^2}$，$\boxed{\text{ケ}}$：$\dfrac{1}{c^2}$

$\boxed{\text{コ}}$：$2n+1$，$\boxed{\text{サ}}$：$-\dfrac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$

$\boxed{\text{シ}}$：$\dfrac{n(2n-1)}{3}$，$\boxed{\text{ス}}$：$\dfrac{\pi^2}{6}$

＊　＊　＊

この題材は有名で「バーゼル問題」と呼ばれています．一般に

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}$$

は s の実部が 1 より大きいときに収束することが知られており，今回は $s=2$ の場合です．1734 年に偉大な数学者オイラーが $\dfrac{\pi^2}{6}$ に収束することを証明しました．

実は2003年に日本女子大でもバーゼル問題が出題されています．そこでは別の誘導がついていました．（以下の問題では，原稿の都合で，表記を原題から若干変えている所があります．）

> nを正の整数または0とする．次の(1)～(7)に答えよ．
>
> (1)　次の式を示せ．
>
> $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$
>
> (2)　$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ とおく．次の式を示せ．
>
> $$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqq 2)$$
>
> (3)　次の式を示せ．
>
> nが偶数のとき
>
> $$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots\cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$
>
> nが奇数のとき
>
> $$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots\cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$
>
> (4)　$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x\,dx$ とおく．$n \geqq 1$ のとき，次の式が成り立つことを示せ．
>
> $$S_{n-1} - \frac{2n}{2n-1} S_n = \frac{1}{n(2n-1)} I_{2n}$$
>
> (5)　Nは整数で$N \geqq 1$とする．このとき，次の式を示せ．
>
> $$S_N = I_{2N} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)$$
>
> (6)　Nは整数で$N \geqq 1$とする．このとき，次の式を示せ．
>
> $$S_N \leqq I_{2N} \cdot \frac{\pi^2}{8(N+1)}$$
>
> なお，$0 < x < \frac{\pi}{2}$ では $x < \frac{\pi}{2} \sin x$ であることを用いてよい．
>
> (7)　次の式を示せ．
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(1)から(3)までは，教科書傍用問題集にも載っているような，何の変哲も無い典型問題です．
一般に，積分の等式を証明するときには

① 計算して値を出し，比べる．
② 置換積分で変形する．
③ 部分積分で変形する．

のいずれかになるでしょう．

(1)の等式は，$t = \frac{\pi}{2} - x$ と置換することで，直ちに従います．

(2)は

$$\begin{aligned}\sin^n x &= \sin^{n-1} x \cdot \sin x \\ &= -\sin^{n-1} x \cdot (\cos x)'\end{aligned}$$

と見て部分積分を行うことで示せます．積分法をある程度学んだ人なら，一度は見たことのある漸化式でしょう．

(3)は，(2)の漸化式を繰り返し用いることで導くことができます．

(4)以降は，見慣れない形の等式・不等式がでてきます．(4)ではS_nとS_{n-1}の関係式を作りたいので，$\cos^{2n} x$の指数を何とか変化させたいという気持ちになります．ここは，素直に部分積分を行いましょう．

$$
\begin{aligned}
S_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n-1}x\cdot\cos x\,dx \\
&= \left[x^2\cos^{2n-1}x\cdot\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\qquad -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos^{2n-1}x\sin x\,dx \\
&\qquad\quad +(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n-2}x\sin^2 x\,dx \\
&= \left[2x\cdot\frac{1}{2n}\cos^{2n}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x\,dx \\
&\qquad +(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n-2}x(1-\cos^2 x)\,dx \\
&= -\frac{1}{n}I_{2n}+(2n-1)(S_{n-1}-S_n)
\end{aligned}
$$

ですから

$$(2n-1)S_{n-1}-2nS_n=\frac{1}{n}I_{2n}$$

となり，両辺を $2n-1$ で割って，示すべき式を得ます.

(5) はなかなか難しい問題です．示すべき式の両辺を $\dfrac{I_{2N}}{2}$ で割った

$$\frac{2S_N}{I_{2N}}=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$$

を示すことにします．これは (4) の関係式から「何とか差分形にならないかなあ」と発想して I_{2n} で両辺を割ることにより見えてきました.

計算してみましょう．(4) の両辺を I_{2n} で割ると

$$\frac{S_{n-1}}{I_{2n}}-\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{S_n}{I_{2n}}=\frac{1}{n(2n-1)}$$

となります．さらに，右辺の分母を n^2 にするために，両辺に $\dfrac{2n-1}{n}$ をかけます.

$$\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{S_{n-1}}{I_{2n}}-2\cdot\frac{S_n}{I_{2n}}=\frac{1}{n^2}\qquad\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここまできたらもう一息です．(2) から

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}$$

が成り立つので

$$\frac{2n}{2n-1}I_{2n}=I_{2n-2}$$

となります．よって

$$\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{S_{n-1}}{I_{2n}}=2\cdot\frac{S_{n-1}}{I_{2n-2}}$$

と変形できるので，(*) は

$$\frac{2S_{n-1}}{I_{2n-2}}-\frac{2S_n}{I_{2n}}=\frac{1}{n^2}\qquad\cdots\cdots\cdots(**)$$

となります．(**) の n に 1，2，3，………，N を代入して加えると

$$
\begin{aligned}
&\frac{2S_0}{I_0}-\frac{2S_1}{I_2}=\frac{1}{1^2}\\
&\frac{2S_1}{I_2}-\frac{2S_2}{I_4}=\frac{1}{2^2}\\
&\frac{2S_2}{I_4}-\frac{2S_3}{I_6}=\frac{1}{3^2}\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{2S_{N-1}}{I_{2N-2}}-\frac{2S_N}{I_{2N}}=\frac{1}{N^2}
\end{aligned}
$$

から

$$\frac{2S_0}{I_0}-\frac{2S_N}{I_{2N}}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$$

となります.

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2},\ S_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\,dx=\frac{\pi^3}{24}$$

ですから

$$\frac{2S_0}{I_0}=2\cdot\frac{\pi^3}{24}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{\pi^2}{6}$$

であり

$$S_N=I_{2N}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\right)$$

が成り立ちます．これで示せました.

「こんな技巧的な変形は思いつかない！」という方もいると思います．その場合は，(2) や (4) の漸化式を利用して，数学的帰納法で証明するのも実践的です.

(6) の不等式は，ノーヒントだとほぼ手がつかない問題でしょう．帰納法で示そうとしても上手くいかないですし，(5) の等式も使えそうにありません．「計算不可の定積分と不等式」の解決法は次の手段が考えられます．

① 長方形や台形で「面積評価」

② 被積分関数を評価して積分．

③ 区間を区切る・広げる・狭める．

今回は，ヒントの不等式を利用して，②で攻めることにしましょう．

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において

$$0<x<\frac{\pi}{2}\sin x$$

が成り立つことを用いると

$$x^2<\frac{\pi^2}{4}\sin^2 x$$

となります．$\cos^{2N}x>0$ より

$$x^2\cos^{2N}x<\frac{\pi^2}{4}\cos^{2N}x\sin^2 x$$

ですから，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において両辺積分して

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^{2N}x\,dx<\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2N}x\sin^2 x\,dx$$

が成り立ちます．

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2N}x\sin^2 x\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2N}x(1-\cos^2 x)\,dx\\&=I_{2N}-I_{2N+2}\\&=I_{2N}-\frac{2N+1}{2N+2}I_{2N}\\&=\frac{1}{2N+2}I_{2N}\end{aligned}$$

ですから

$$S_N<\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{2N+2}I_{2N}=I_{2N}\cdot\frac{\pi^2}{8(N+1)}$$

となり，示すべき不等式を導くことができました．

長い道のりでした．いよいよ (7) です．ヒントの不等式を使って，はさみうちの原理に持ち込みます．

N が十分大のとき，(5) と (6) から

$$0\leqq S_N=\frac{I_{2N}}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\right)\leqq I_{2N}\cdot\frac{\pi^2}{8(N+1)}$$

が成り立ちます．各辺 $\dfrac{I_{2N}}{2}$ で割って

$$0\leqq\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\leqq\frac{\pi^2}{4(N+1)}$$

となります．ここで

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\pi^2}{4(N+1)}=0$$

より，はさみうちの原理から

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\right)=0$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

です．よって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

が示されました．

* * *

数学の面白みは，数学自身にもそうですが，数学にまつわる人間ドラマや歴史にもあると思います．天才一家ベルヌーイ一族にすら解けなかったバーゼル問題を解決した偉大なオイラーや，高校数学の範囲で証明するまでに至った後世の数学者達の歩みのことを考えると，わくわくしてきませんか？

人類の英知の結晶に誰でも簡単に触れられる現代に生まれたことを感謝したいですね．

（笹谷）