強者の戦略

> 3 次方程式 $x^3+3x^2-1=0$ の 1 つの解を α とする．
> (1)　$(2\alpha^2+5\alpha-1)^2$ を $a\alpha^2+b\alpha+c$ の形で表せ．
> 　ただし，a，b，c は有理数とする．
> (2)　上の 3 次方程式の α 以外の 2 つの解を (1) と同じ形の式で表せ．

では，解説していきましょう．

実は，当時の電話帳も，某出版会社の便覧も，以下の様に解いています．

(1)　$\alpha^3+3\alpha^2-1=0$ だから

$$(2\alpha^2+5\alpha-1)^2=4\alpha^4+20\alpha^3+21\alpha^2-10\alpha+1$$
$$=(4\alpha+8)(\alpha^3+3\alpha^2-1)-3\alpha^2-6\alpha+9$$
$$=-3\alpha^2-6\alpha+9$$

(2)　α 以外の解を β，γ とすると

$\alpha+\beta+\gamma=-3$，$\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma=0$

$\beta+\gamma=-(\alpha+3)$，$\beta\gamma=\alpha(\alpha+3)$

したがって，β，γ は

$t^2+(\alpha+3)t+\alpha(\alpha+3)=0$ の解で，(1) の結果から

$$t=\frac{-(\alpha+3)\pm\sqrt{(\alpha+3)^2-4\alpha(\alpha+3)}}{2}$$
$$=\frac{-(\alpha+3)\pm\sqrt{-3\alpha^2-6\alpha+9}}{2}$$
$$=\frac{-(\alpha+3)\pm(2\alpha^2+5\alpha-1)}{2}$$

よって，α 以外の 2 つの解は

$\alpha^2+2\alpha-2$，$-\alpha^2-3\alpha-1$

これでは，東大に合格することは難しいと思われます．

皆さんは，この解答のどこに瑕疵があるか，分かりますか．

ポイントは α がどんな数なのかということです．

一般に 3 次方程式の解は実数とは限りません．（今回の 3 次方程式では微分法を用いて，$y=x^3+3x^2-1$ のグラフを描けば，異なる 3 つの実数解をもつことが分かり，α は実数となりますが，上の解答中では，これを示していません．）よって，$t^2+(\alpha+3)t+\alpha(\alpha+3)=0$ は実数係数とは限らないのです．教科書を見て下さい．2 次方程式の解の公式は実数係数のときにのみ成り立つものです．理由は虚数 z に対して $\sqrt{z}$ が（高校生の範囲では）存在しないからです．したがって，この解答では，(2) が大減点です．

(2) の正しい解答は

（解 1）「以下の議論を (2) の冒頭に加える」

$f(x)=x^3+3x^2-1$ とすると，

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$ より

$f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

となり，$y=f(x)$ のグラフは，x 軸と異なる 3 つの共有点をもつ．よって，$f(x)=0$ の解はすべて実数であるから，α は実数である．

（解 2）　$t^2+(\alpha+3)t+\alpha(\alpha+3)=0$ につづけて

$$\left(t+\frac{\alpha+3}{2}\right)^2-\frac{(\alpha+3)^2}{4}+\alpha(\alpha+3)=0$$
$$\left(t+\frac{\alpha+3}{2}\right)^2=\frac{-3\alpha^2-6\alpha+9}{4}=\frac{(2\alpha^2+5\alpha-1)^2}{4}\quad(\because (1))$$
$$\left(t+\frac{\alpha+3}{2}\right)^2-\left(\frac{2\alpha^2+5\alpha-1}{2}\right)^2=0$$
$$(t+\alpha^2+3\alpha+1)(t-\alpha^2-2\alpha+2)=0$$

よって，α 以外の 2 つの解は

$t=-\alpha^2-3\alpha-1$，$\alpha^2+2\alpha-2$ である．

（解 2）の 3 行目 $X^2=A^2$ の後で $X=\pm A$ とするときに，$X=\pm\sqrt{A^2}=\pm|A|=\pm A$ としたのでは元も子もありません．

この様に実数範囲でしかできないことを，複素数範囲でうっかり使ってしまうと，下手をすると，0 点答案となってしまいます．他にも例を挙げておきましょう．

複素数 $z=a+bi$（a，b は実数，i は虚数単位）に対して

1.　$|z|^2\neq z^2$（正しくは $|z|^2=z\bar{z}$）
2.　$\sqrt{z}$ は存在しない．(高校数学の範囲では存在しません)
3.　$\int(x^2+ax+b)dx$ で $x^2+ax+b=0$ が実数解をもつかどうか分からない段階で
　　$\int(x^2+ax+b)dx=\int(x-\alpha)(x-\beta)dx$
　　としてしまう．（高校範囲の微積分は実数範囲のみです．）

などです．

2 より，当然，2 次方程式の解の公式，判別式は NG です．

では，解と係数の関係はどうでしょうか．こちらは，因数分解から，係数比較で得られたものなので，複素数係数でも OK となります．