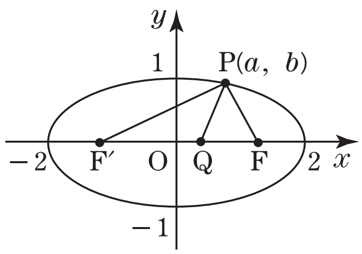
強者の戦略

それでは，前回の解答です．

> 楕円 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の焦点を F，F′ とし，F の x 座標は正とする．また，C 上の点 P$(a,\ b)$ に対して，　∠FPF′ の二等分線と x 軸との交点を Q とする．ただし，$ab \fallingdotseq 0$ とする．
>
> (1)　$\dfrac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{FP}}$ の値を求めよ．
>
> (2)　直線 PQ の傾きは直線 OP の傾きの何倍か？

＜解答＞

(1)



$$\frac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{FP}}=k$$

とおくと，角の二等分線の性質より

$$\frac{\mathrm{F'Q}}{\mathrm{F'P}}=k$$

である．

$$\mathrm{FP}+\mathrm{F'P}=4,\ \mathrm{FQ}+\mathrm{F'Q}=2\sqrt{3}$$

より

$$k(\mathrm{FP}+\mathrm{F'P})=2\sqrt{3}$$

$$\therefore\ k=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である．

(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{FP}^2&=(a-\sqrt{3})^2+b^2\\&=(a-\sqrt{3})^2+1-\frac{a^2}{4}\\&=\frac{3}{4}a^2-2\sqrt{3}a+4\\&=\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\end{aligned}$$

より

$$\mathrm{FP}=2-\frac{\sqrt{3}}{2}a\,(>0)$$

である．

これと (1) より，Q の x 座標は

$$\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=\frac{3}{4}a$$

である．よって，直線 PQ の傾きは，直線 OP の傾きの

$$\frac{b}{a-\frac{3}{4}a}\div\frac{b}{a}=4\ (\text{倍})$$

である．

＜解答終＞

＜コメント＞

数学科の川﨑です．今回の問題は非常にシンプルな設定でした．(2) まで正しく出せましたか？

この問題，「いつもより簡単」と思った人もいると思います．解答の短さがそれを物語っていますね．

しかし，先月，高 3 の最上位クラスで同じ問題を解いてもらいましたが，完答している生徒は思ったほど多くありませんでした (時間を 10 分ぐらいしか与えていない意地悪はしていますが…)．特に，(1) を (2) に使うのがイメージしにくいようで，上手く計算しないと泥沼にはまってしまいます．

以下，設問ごとに補足を述べます．

(1)　FP，FQ の長さをそれぞれ計算しても良いのですが，大変です．楕円の性質をうまく使って楽にいきたいところです．

角の二等分線の条件から

$$\frac{\mathrm{F'P}}{\mathrm{FP}}=\frac{\mathrm{F'Q}}{\mathrm{FQ}}$$

が成り立つのは大丈夫ですね (分数は「比」です)．これを変形して

$$\frac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{FP}}=\frac{\mathrm{F'Q}}{\mathrm{F'P}}$$

となります．この値を k とおくと

$$\mathrm{FQ}=k\mathrm{FP},\ \mathrm{F'Q}=k\mathrm{F'P}$$

です．

すると，楕円の性質から

$$\mathrm{FP}+\mathrm{F'P}=4\ (\text{長軸の長さ})$$

であり，焦点 F，F′ の座標は $(\pm\sqrt{3},\ 0)$ より

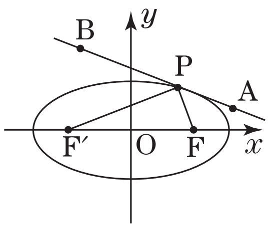
$$\mathrm{FQ}+\mathrm{F'Q}=2\sqrt{3}$$

となるので，これを用いると k の値が出ます．

(2)　必要なのは Q の x 座標です (これが分かれば直線 PQ の傾きが分かる)．(1) がヒントになっています．これに気付かないと大変です．FP の長さは 2 点間の距離公式を使えばすぐ出せます．計算の中で $\sqrt{\ }$ が外せるのが大きいです．すると，(1) から FQ の長さも分かり，Q の座標が分かります．ここまでくれば答えは出せますね．

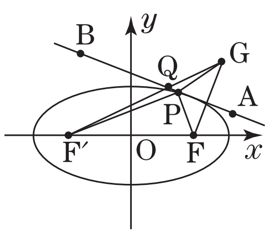
さて，この問題．私が初見で解いた時，(2) の答えが一定になることに驚きました．これは何かあるなと図をよく眺めてみると，次の事実が背景にあることが浮かんできました．

定理 1



上図のように，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b>0)$ 上の点 P における接線上に点 A，B をとる．
また，この楕円の焦点を図のように F，F′ とする．
このとき，$\angle\mathrm{FPA}=\angle\mathrm{F'PB}$ である．

＜証明＞



点 F の直線 AB に関する対称点を G とする．
3 点 F′，P，G が一直線上にあることを示せば十分である．これを背理法で示す．

P が直線 F′G 上にないとすると，直線 F′G と直線 AB は点 P 以外で交わる．この交点を Q とする．
Q は楕円外の点であるから

$$\mathrm{F'Q}+\mathrm{FQ}>\mathrm{F'P}+\mathrm{FP}\quad\cdots\cdots ①$$

である．

一方，三角不等式から

$$\mathrm{F'G}<\mathrm{F'P}+\mathrm{GP}$$
$$\iff\quad \mathrm{F'Q}+\mathrm{GQ}<\mathrm{F'P}+\mathrm{GP}\quad\cdots\cdots ②$$

である．ここで，点 G は点 F の直線 AB に関する対称点であるから

$$\mathrm{GQ}=\mathrm{FQ},\ \mathrm{GP}=\mathrm{FP}$$

であり，② は

$$\mathrm{F'Q}+\mathrm{FQ}<\mathrm{F'P}+\mathrm{FP}$$

となる．これは ① に矛盾する．

したがって，3 点 F′，P，G は一直線上にあるので

$$\angle\mathrm{FPA}=\angle\mathrm{F'PB}$$

である．

＜証明終＞

このような「反射」の問題は，対称点を取って折れ線を真っすぐにするのが定石です．是非おさえておいてください．

この定理を使うと，今回出題した問題の (2) は次のように解けます．

＜ (2) の別解＞

点 P における楕円 C の接線は

$$\frac{a}{4}x+by=1$$

であるから，その傾きは ($b\neq 0$ より)

$$-\frac{a}{4b}$$

である．

ここで，先ほどの定理と，PQ が $\angle\mathrm{FPF'}$ を二等

分することから，直線 PQ は点 P における接線と直交する．よって，直線 PQ の傾きは

$$\frac{4b}{a}$$

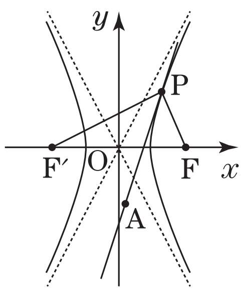
であり，これは直線 OP の傾きの 4 倍である．

＜別解終＞

この別解を見ると，答えの 4 という数字は楕円の係数の分母 (4 と 1) から導かれていることが分かりますね．

双曲線でも先ほどの定理 1 と似たような事実がありますので，それを今回の問題にしておきます．以下を示してみてください．

問

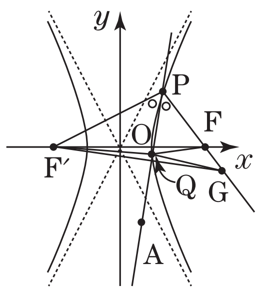


上図のように，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上に点 P をとり，点 P における接線上に点 A をとる．焦点を F，F′ とするとき

$$\angle \mathrm{FPA}=\angle \mathrm{F'PA}$$

であることを示せ．

＜解答＞



y 軸についての対称性から，点 P が $x>0$ の部分にあるとして良い．

$\angle \mathrm{FPF'}$ の二等分線 l が点 P における接線と一致することを背理法で示す．

l が接線と一致しないとすると，双曲線の凸性から，l は双曲線と点 P 以外の交点をもつ．これを点 Q とする．また，F′ の l に関する対称点を G とする．G は直線 PF 上にある．

すると

$$\mathrm{F'P}-\mathrm{FP}=\mathrm{GP}-\mathrm{FP}=\mathrm{FG} \quad \cdots\cdots ①$$

である．また，三角不等式より

$$\mathrm{F'Q}-\mathrm{FQ}=\mathrm{GQ}-\mathrm{FQ}<\mathrm{FG} \quad \cdots\cdots ②$$

である．双曲線の性質より

$$\mathrm{F'P}-\mathrm{FP}=\mathrm{F'Q}-\mathrm{FQ}$$

であるから，①，② は矛盾する．

よって，l は点 P における接線となり

$$\angle \mathrm{FPA}=\angle \mathrm{F'PA}$$

が成り立つ．

＜解答終＞

示せましたか？この問題の結論と定理 1 を合わせると，次の定理 2 も証明できます．

定理２

楕円 C_1： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ と

双曲線 C_2： $\dfrac{x^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{d^2}=1$ $(c>0,\ d>0)$ があり，

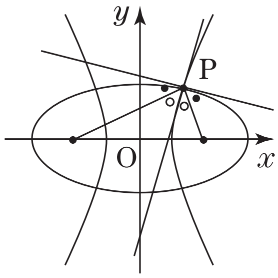
これらの焦点が一致するとする．

このとき，これら 2 曲線の交点 (のうち 1 つ) を P とすると，点 P における C_1 の接線と C_2 の接線は直交する．

＜証明＞

(証明というまでもないですが…)

次図から明らかです．



＜証明終＞

定理 2 は入試では頻出です．ぜひおさえておきましょう．

それでは，今回はここまでにしたいと思います．今年度私の担当は今回が最後です．受験生の方はいよいよ入試ですね．無事に乗り切れることを願っています．受験生以外の方は，来年もこのコーナーをお楽しみに．よろしくお願いします．

＜数学科　川﨑＞