強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第 1 問（数 III）

e を自然対数の底とし，n を自然数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq t \leqq 1$ に対して，不等式

$$e^{-t} \leqq 1+\left(\frac{1}{e}-1\right)t$$

が成り立つことを示せ．

(2) 曲線 $y=\dfrac{(\log x)^n}{x}$ $(x \geqq 1)$ と x 軸および直線 $x=e$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $V(n)$ とするとき，不等式

$$V(n) \leqq \frac{\pi}{2n+2}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{2n+1}\right)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nV(n)$ を求めよ．

＜解答＞

(1) $$f(t)=1+\left(\frac{1}{e}-1\right)t-e^{-t}$$

とおく．$0 \leqq t \leqq 1$ で $f(t) \geqq 0$ であることを示す．

$$f'(t)=\frac{1}{e}-1+e^{-t}$$

であり，$f'(t)$ は単調に減少する．さらに

$$f'(0)=\frac{1}{e}>0,\quad f'(1)=-1<0$$

であるから，$f'(\alpha)=0$，$0 \leqq \alpha \leqq 1$ を満たす α がただ 1 つ存在する．$f(t)$ の $0 \leqq t \leqq 1$ における増減表は下のようになる．

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

これと

$$f(0)=f(1)=0$$

より，$0 \leqq t \leqq 1$ において $f(t) \geqq 0$ であることが示された．

(2) $$\frac{(\log x)^n}{x}=0 \iff x=1$$

であるから

$$V(n)=\int_1^e \pi\left(\frac{(\log x)^n}{x}\right)^2 dx$$

と表せる．$\log x=t$ とおくと

$$\frac{dx}{x}=dt,\quad \frac{1}{x}=e^{-t},\quad \begin{array}{c|c} x & 1\to e \\ \hline t & 0\to 1 \end{array}$$

であるから

$$V(n)=\pi\int_0^1 t^{2n}e^{-t}dt$$

である．ここで，(1) より $0 \leqq t \leqq 1$ で

$$t^{2n}e^{-t} \leqq t^{2n}\left\{1+\left(\frac{1}{e}-1\right)t\right\}$$

であるから，辺々積分して

$$\begin{aligned} V(n) &\leqq \pi\int_0^1 t^{2n}\left\{1+\left(\frac{1}{e}-1\right)t\right\}dt \\ &=\pi\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}+\left(\frac{1}{e}-1\right)\cdot\frac{t^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 \\ &=\pi\left\{\frac{1}{2n+1}+\left(\frac{1}{e}-1\right)\cdot\frac{1}{2n+2}\right\} \\ &=\frac{\pi}{2n+2}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ．

(3) $$\begin{aligned} V(n) &=\pi\int_0^1 t^{2n}e^{-t}dt \\ &\geqq \pi\int_0^1 t^{2n}\cdot\frac{1}{e}dt \\ &=\frac{\pi}{e(2n+1)} \end{aligned}$$

であるから，(2) の不等式と合わせて

$$\frac{\pi}{e(2n+1)} \leqq V(n) \leqq \frac{\pi}{2n+2}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\frac{\pi}{e\left(2+\dfrac{1}{n}\right)} \leqq nV(n) \leqq \frac{\pi}{2+\dfrac{2}{n}}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{2n+1}\right)$$

が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{e\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}=\frac{\pi}{2e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2+\dfrac{2}{n}}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2e}$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}nV(n)=\frac{\pi}{2e}$$

である．

＜解答終＞

＜コメント＞

数学科の川﨑です．今回の問題はいかがだったでしょうか．この問題はこの春，大阪府立大学で後期に出題された問題です．数Ⅲの様々な知識が確認できる良問だと思います．出来なかった所を出来るようにすることで，数Ⅲの力を伸ばしましょう．

以下，設問ごとに補足を述べます．

(1)　不等式の証明問題です．定石通り，辺々差をとって 0 と比較します．グラフを描くために微分するのですが，$f'(t)$ を求めただけではすぐに符号変化する点が分かりません．このような時は

「微分して　符号が不明　再微分」

という言葉を頭に置いておいてください．$f'(t)$ のグラフを描いて，符号を調べるのです．難関大になるほど，微分の符号がすぐに分かるということは少なくなります．本問では $f''(t)$ を計算しても良いのですが，$f'(t)$ の形からすぐに単調減少なことが分かります．したがって，あとは端値を調べることで符号が決定します．$0\leqq t\leqq 1$ の中に $f'(t)$ が符号変化する点があることが分かるので，増減表を書きます．あとは $f(0)$，$f(1)$ を調べれば十分で，どちらも 0 になるので不等式は示されます．

この不等式の証明として，以下のような「グラフの凸性」を使うことも考えられます．

＜(1) の別解＞

$$g(t)=e^{-t},\quad h(t)=1+\left(\frac{1}{e}-1\right)t$$

とおく．$y=g(t)$ のグラフは下に凸である．

$$g(0)=h(0)=1,\quad g(1)=h(1)=\frac{1}{e}$$

であるから，曲線 $y=g(t)$ と直線 $y=h(t)$ は 2 点

$$(0,\ 1),\ \left(1,\ \frac{1}{e}\right)$$

で交わる．グラフの凸性から，$0\leqq t\leqq 1$ で

$$g(t)\leqq h(t)$$

が成り立つ．

＜別解終＞

(2)　この小問が勝負を決める問題です．実の所，私がこの問題を解いた時，(1) の利用にすぐ気付けず時間がかかりました．(1) は (3) にとどめとして使うだろうという先入観が，問題を解く邪魔になってしまいました．大反省です．

「(1) を使う」ということが意識できていれば，V_n の立式後，置換積分が思いつくと思います (log のままでは (1) が使えません)．置換積分後に被積分関数に出てくる e^{-t} を (1) を使って 1 次式でおさえることで，示すべき不等式を得ます．

負け惜しみになりますが，私が最初に解いたとき (2) をこう考えたという式を紹介しておきます．

＜参考＞

$$V(n)=\int_1^e\pi\left(\frac{(\log x)^n}{x}\right)^2dx$$

より

$$\begin{aligned}
V(n)&=\pi\int_1^e\frac{1}{x}\left(\frac{(\log x)^{2n+1}}{2n+1}\right)'dx\\
&=\pi\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{(\log x)^{2n+1}}{2n+1}\right]_1^e\\
&\qquad+\frac{\pi}{2n+1}\int_1^e\frac{(\log x)^{2n+1}}{x^2}dx\\
&=\frac{\pi}{e(2n+1)}+\frac{\pi}{2n+1}\int_1^e\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{(\log x)^{2n+2}}{2n+2}\right)'dx\\
&=\frac{\pi}{e(2n+1)}+\frac{\pi}{2n+1}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{(\log x)^{2n+2}}{2n+2}\right]_1^e\\
&\qquad+\frac{\pi}{2n+1}\int_1^e\frac{1}{x^2}\cdot\frac{(\log x)^{2n+2}}{2n+2}dx\\
&\leqq\frac{\pi}{e(2n+1)}+\frac{\pi}{e(2n+1)(2n+2)}
\end{aligned}$$

である．このように部分積分を 2 回行うことで，(2) に近い不等式を作ることができます (実際，この

不等式でも (3) の極限は得られます) が，(2) の不等式の方が厳しい結果になっているので，これでは失敗です．

(3)　(2) が大きなヒントになります．答えの予想などはすぐにできるでしょう．

「不等式＋極限＝ はさみうち」

です．(2) では片側しか不等式がありませんので，もう片側は自分で作ることになります．ヒントが無いということは，作るのがそれほど難しくないということでしょう．実際

$$V(n)=\pi\int_0^1 t^{2n}e^{-t}dt$$

のうち，被積分関数の e^{-t} を $\dfrac{1}{e}$ でおさえることで不等式を得られます．

このページで何度も紹介していますが，積分の中に積や商がある場合は

「単調なものに着目して端でおさえる」

というのが有効である場合が多いです．積分の扱い方に慣れてください．

今回も最後に練習問題を載せておきます．積分の評価を用いる有名問題です．是非やってみてください．

問

(1)　n を自然数とする．

$$\left|\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}dx\right| \leqq \frac{1}{n+1}$$

を示せ．

(2)　$x \geqq 0$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-x)^{k-1}$ を計算せよ．

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ を求めよ．

＜解答＞

(1)　一般に

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|dx$$

が成り立つことに注意すると

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}dx\right| &\leqq \int_0^1 \left|\frac{(-x)^n}{1+x}\right|dx\\ &=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx\\ &\leqq \int_0^1 x^n\,dx\\ &=\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

である．

(2)　$x \geqq 0$ より，$-x \fallingdotseq 1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(-x)^{k-1}=\frac{1-(-x)^n}{1+x}$$

である．

(3)　(2) の等式を $0 \leqq x \leqq 1$ で積分して

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n}(-x)^{k-1}\,dx=\int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}dx$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx-\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}dx$$

である．ここで，(1) より

$$0 \leqq \left|\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}dx\right| \leqq \frac{1}{n+1}$$

であり

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}dx\right|=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}dx=0$$

である．よって

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}&=\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx\\ &=\log 2\end{aligned}$$

である．

＜解答終＞

いかがだったでしょうか？積分の被積分関数をどのように評価するかは練習が必要です．感覚を掴んでください (ちなみに，この問の x を x^2 に変えるとある有名な無限級数が出てきます．x^3 だと？色々遊んでみてください).

今回は以上にしたいと思います．また次回をお楽しみに.