強者の戦略

数学科の横山です．みなさん，今回の問題はいかがだったでしょうか．今回の問題は，難易度はそれほど高くないですが，一歩目を間違えるとなかなか正しい解答までは辿りつけなかったのではないでしょうか．では，早速＜方針＞から見ていきましょう．

> 0 でない 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする．
>
> $$f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7$$
> $$g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2$$
>
> このとき，$f(x)$ と $g(x)$ を求めよ．

＜方針＞

今回は 2019 年度の九州大学の入試問題からの出題でした．実は原題では (1) があり，(1) では

「$f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数がともに 2 以下であることを示せ．」

という出題がありました．これが当然ヒントになっているわけですが，簡単に言うと，いきなり $f(x)$ や $g(x)$ を求めるわけではなく，まず，

$f(x)$，$g(x)$ の次数を決める

ということが必要です．次数の決め方については，定石通り，$f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ a 次，b 次 (a，b は 0 以上の整数) と置き，条件の 2 式において，それぞれ (左辺) と (右辺) の最高次数を比較すればよいでしょう．その際に，1 点気をつけなければならないことがあります．条件の 2 つ目の式の (右辺) において $x^4f(x)$ と $3x^2g(x)$ では，どちらの次数が大きいかで場合分けが必要になります．

ここまでで，$f(x)$，$g(x)$ の次数が確定したら，この後も定石通り，$f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ文字を使って表し，条件の 2 式が恒等式であることから

係数比較

を行えば，$f(x)$ と $g(x)$ が求まります．

それでは，＜解答＞です．

＜解答＞

$$f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7 \cdots\cdots ①$$
$$g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2 \cdots\cdots ②$$

とし，$f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ a 次式，b 次式 (a，b は 0 以上の整数) とする．

① において，(左辺) は $2a$ 次式となる．(右辺) は $x^2g(x)$ の項に注目すると $(b+2)$ 次式となる．

よって

$$2a=b+2 \cdots\cdots ③$$

である．次に，② において，(左辺) は $3b$ 次式となる．(右辺) は $x^4f(x)$ の項は $(a+4)$ 次であり，$3x^2g(x)$ の項は $(b+2)$ 次である．よって

・$a+4 \geqq b+2$ のとき，(右辺) は $(a+4)$ 次式

・$a+4<b+2$ のとき，(右辺) は $(b+2)$ 次式

である．以上より

・$a+4 \geqq b+2$ のとき，$3b=a+4 \cdots\cdots ④$

・$a+4<b+2$ のとき，$3b=b+2 \cdots\cdots ⑤$

である．

③ と ④ を連立すると

$$a=2,\ b=2$$

であり，これは $a+4 \geqq b+2$ を満たす．

③ と ⑤ を連立すると

$$a=\frac{3}{2},\ b=1$$

であり，これは a が 0 以上の整数であることに反する．

よって，$a=2$，$b=2$，つまり，$f(x)$，$g(x)$ はともに 2 次式である．よって

$$f(x)=Ax^2+Bx+C \quad (A \fallingdotseq 0)$$
$$g(x)=Dx^2+Ex+F \quad (D \fallingdotseq 0)$$

とおける．① より

$$f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7$$
$$Ax^4+Bx^2+C=(x^2+2)(Dx^2+Ex+F)+7$$
$$Ax^4+Bx^2+C=Dx^4+Ex^3+(2D+F)x^2+2Ex+(2F+7)$$

である．係数比較をすると

$A=D$ …… ⑥

$E=0$

$B=2D+F$

$C=2F+7$ …… ⑦

である．$E=0$ に注意して，② より

$g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2$

$Dx^6+F=x^4(Ax^2+Bx+C)-3x^2(Dx^2+F)$
$\qquad -6x^2-2$

$Dx^6+F=Ax^6+Bx^5+(C-3D)x^4$
$\qquad -3(F+2)x^2-2$

である．係数比較をすると

$D=A$

$B=0$

$C-3D=0$ …… ⑧

$E=0$

$F+2=0$

$F=-2$

である．⑥，⑦，⑧，$F=-2$ より

$A=1$，$C=3$，$D=1$

であり，これらは $B=2D+F$ をみたし，さらに $A\fallingdotseq 0$，$D\fallingdotseq 0$ もみたす．よって

$A=1$，$B=0$，$C=3$，$D=1$，$E=0$，$F=-2$

であるから

$f(x)=x^2+3$

$g(x)=x^2-2$

である．

では，練習用に１題追加問題をつけておきます．解説はつけず，解答だけ載せておきますので，自力で最後まで解ききってください．

多項式 $f(x)$ について，次の条件 (i)，(ii)，(iii) を考える．

(i)　$x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$

(ii)　$f(1-x)=f(x)$

(iii)　$f(1)=1$

このとき，条件 (i)，(ii)，(iii) をすべてみたす多項式 $f(x)$ を求めよ．

一応ヒントです．手が出ない人は参考にしてください．
「$f(x)$ が多項式ということと (i) を用いると $f(x)$ が●次以下ということが決まります．」

あとは自力でがんばってください！

＜解答＞

$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

＜終わりに＞

今回の出題問題は標準レベルだったと思います．逆に言うと，強者を目指す皆さんにとっては入試本番では絶対に落とせない問題となります．その中でやはり重要になるのは，定石をしっかりと理解，使えるようにしておくことだと思います．現高３生の方は今一度，定石がちゃんと定着しているか確認をしてください．現高１，高２生の方は今習っている内容は定石として，高３になったときにちゃんと使えるように頭に叩きこんでおいてくださいね．

では，今回はここまでにしたいと思います．お疲れ様でした．

(横山)