強者の戦略

今回の問題はいかがでしたか？基本的な問題ですが，工夫しないとなかなか大変な計算量になったと思います．それでは，さっそく確認していきましょう．

問題

t を $0<t<1$ を満たす実数とする．0，$\dfrac{1}{t}$ 以外のすべての実数 x で定義された関数

$$f(x)=\frac{x+t}{x(1-tx)}$$

を考える．

(1)　$f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつことを示せ．

(2)　$f(x)$ の極大値を与える x の値を α，極小値を与える x の値を β とし，座標平面上に 2 点 $\mathrm{P}(\alpha\,,\,f(\alpha))$，$\mathrm{Q}(\beta\,,\,f(\beta))$ をとる．t が $0<t<1$ を満たしながら変化するとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ．

《考え方》

まずは「極値」の定義を確認してください．$f(x)$ が微分可能なとき，$f(x)$ が $x=a$ で極値をもつための条件は

$f'(a)=0$　かつ　$f'(x)$ が $x=a$ の前後で符号変化する

です．(1) では，$f'(x)$ を計算し，その符号変化に注目します．

商の微分公式を用いて計算してください．分母が必ず正になるので，分子のうち符号が確定していない一部分だけ抜き出して考えます．計算すると

$$f'(x)=\frac{t(x^2+2tx-1)}{x^2(1-tx)^2}$$

となりますから

$$g(x)=x^2+2tx-1$$

とおきます．$g(x)=0$ について，解の公式を用いると

$$x=-t\pm\sqrt{t^2+1}$$

となります．この解を利用して $g(x)$ を因数分解し，$g(x)$ の符号変化を調べていくのが本道です．しかし，いちいちこのような複雑な値を書いていくのも面倒なので，普通は

「$g(x)=0$ の 2 解を p，q とすると………」

として，解と係数の関係を用いることが多いです．

増減表をしっかり書くこと，および，p や q が定義域内か否かをチェックすることが大事です．

(2) は軌跡を求める問題です．求める点 M を $(X\,,\,Y)$ と置き，X と Y をそれぞれ α，β，t で表します．α，β が $g(x)=0$ の 2 つの解ですから，解と係数の関係を用いて X，Y を t のみの式で表す方向で変形しましょう．対称式の性質を使って，$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ で表していきます．

《解答》

(1)　$x\fallingdotseq 0$，$\dfrac{1}{t}$ において

$$f(x)=\frac{x+t}{x(1-tx)}$$

より

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1\cdot x(1-tx)-(x+t)(1-2tx)}{x^2(1-tx)^2}\\&=\frac{t(x^2+2tx-1)}{x^2(1-tx)^2}\end{aligned}$$

である．

$0<t<1$ より $\dfrac{t}{x^2(1-tx)^2}>0$ である．

$g(x)=x^2+2tx-1$ とおく．

$$g(0)=-1<0\,,\ g\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2}+1>0$$

であるから，$y=g(x)$ のグラフは x 軸と異なる 2 点で交わる．交点の x 座標を p，q $(p<q)$ とすると

$$p<0<q<\frac{1}{t}$$

であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$-\infty$	$\cdots$	p	$\cdots$	0	$\cdots$	q	$\cdots$	$\frac{1}{t}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗		↗	

したがって，$f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつ．

■

(2)　$\mathrm{M}(X\,,\,Y)$ とおく．

$$\begin{cases}X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\[2mm]Y=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\end{cases}$$

である．α，β は $g(x)=0$ の 2 解であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-2t\,,\ \alpha\beta=-1$$

である．よって

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4t^2+2$$

であるから

$$\begin{aligned}&f(\alpha)+f(\beta)\\&=\frac{\alpha+t}{\alpha(1-t\alpha)}+\frac{\beta+t}{\beta(1-t\beta)}\\&=\frac{\beta(1-t\beta)(\alpha+t)+\alpha(1-t\alpha)(\beta+t)}{\alpha\beta(1-t\alpha)(1-t\beta)}\\&=\frac{2\alpha\beta+(\alpha+\beta)(1-\alpha\beta)t-(\alpha^2+\beta^2)t^2}{\alpha\beta\{1-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta t^2\}}\\&=\frac{-2+(-2t)\cdot 2\cdot t-(4t^2+2)t^2}{(-1)\cdot(1+2t^2-t^2)}\end{aligned}$$

$$=\frac{2(2t^4+3t^2+1)}{t^2+1}$$
$$=2(2t^2+1)$$

である．

よって

$$\begin{cases} X=-t & \cdots\cdots\cdots ① \\ Y=2t^2+1 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

である．① より

$$t=-X \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

である．③ を ② に代入して

$$Y=2X^2+1$$

である．③ を $0<t<1$ に代入して

$$-1<X<0$$

である．

以上から，求める軌跡は

放物線の一部：$y=2x^2+1 \quad (-1<x<0)$

である．

＊　　　＊　　　＊

特にしんどいのは，$f(\alpha)+f(\beta)$ の計算です．なんとか工夫できないでしょうか？そもそも α，β とはなに？

α，β は方程式 $g(x)=0$ の 2 つの実数解です．解とは

「代入したときに等式が成り立つような x の値」

です．すなわち

$$g(\alpha)=0 \qquad \therefore \quad \alpha^2+2t\alpha-1=0$$
$$g(\beta)=0 \qquad \therefore \quad \beta^2+2t\beta-1=0$$

です．これを用いると，$f(\alpha)$ や $f(\beta)$ の分母が簡単になります．

$$1-t\alpha=\alpha^2+t\alpha$$

より

$$f(\alpha)=\frac{\alpha+t}{\alpha(1-t\alpha)}=\frac{\alpha+t}{\alpha^2(\alpha+t)}=\frac{1}{\alpha^2}$$

となります．同様にして

$$f(\beta)=\frac{1}{\beta^2}$$

です．これを用いると

$$\begin{aligned} f(\alpha)+f(\beta)&=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2} \\ &=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2} \\ &=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} \\ &=\frac{(-2t)^2+2}{(-1)^2} \\ &=2(2t^2+1) \end{aligned}$$

となり，かなり楽になりますね．

＊　　　＊　　　＊

ところで，今回のような工夫は，他の問題でも行えるのでしょうか？実は，次のようなことが成り立ちます．

> $f(x)$，$g(x)$ が微分可能であるとする．
>
> $$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=0$$
>
> を満たす x が存在するときを考える．
> その x を α として，$g'(\alpha)\fallingdotseq 0$ ならば
>
> $$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$
>
> が成り立つ．

《証明》

商の微分法を用いて

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

となる．

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=0$$

を満たす x を α としたとき

$$\frac{f'(\alpha)g(\alpha)-f(\alpha)g'(\alpha)}{\{g(\alpha)\}^2}=0$$

が成り立つ．$g'(\alpha)\fallingdotseq 0$ ならば

$$f'(\alpha)g(\alpha)-f(\alpha)g'(\alpha)=0$$
$$\therefore \quad \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

である．

■

この事実は，関数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の極値を求めるときに役立ちます．

例えば，$F(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ のとき

$$F'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$$

ですから，$F'(1)=F'(-1)=0$ です．

$$(x)'=1,\ (x^2+1)'=2x$$

ですから，$G(x)=\dfrac{1}{2x}$ とおくと

$$F(1)=G(1)=\frac{1}{2},\ F(-1)=G(-1)=-\frac{1}{2}$$

と簡単に求めることができます．

強者の戦略

＊　　　＊　　　＊

　ちょっとした工夫の積み重ねが，大きな一歩に繋がります．易しい問題にも難しい問題にも必ず考えるべきポイントがありますから，しっかり学んでいきましょう．

笹谷