強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第 1 問（数 III）

$t>0$ とし，座標空間に 3 点

$$A(1,\ 0,\ t),\ B\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ t\right),\ C\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ t\right)$$

を考える．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ が互いに垂直であるとき，t の値を求めよ．

(2) (1) のとき，O，A，B，C を頂点とする立方体の残りの 4 つの頂点の座標を求めよ．

(3) (2) の立方体を z 軸の周りに 1 回転させるとき，立方体が通過する部分の体積を求めよ．

＜解答＞

(1) $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ はいずれも零ベクトルではないので，条件は

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \iff -\frac{1}{2}+t^2=0$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0 \iff -\frac{1}{2}+t^2=0$$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0 \iff -\frac{1}{2}+t^2=0$$

である．$t>0$ に注意して

$$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

である．

(2) (1) のとき

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

であるから，題意の立方体は存在する．

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{2}\right)$$

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(-1,\ 0,\ \sqrt{2}\right)$$

$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{2}\right)$$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(0,\ 0,\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

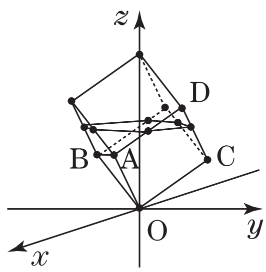
であるから，残りの 4 つの頂点の座標は

$$\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{2}\right),\ \left(-1,\ 0,\ \sqrt{2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{2}\right),\ \left(0,\ 0,\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

である．

(3)



(2) より，この立方体の頂点のうち，3 点 (A，B，C) は平面 $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 上にあり，3 点は平面 $z=\sqrt{2}$ 上にある．求める立体を

$$0\leqq z\leqq\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\leqq z\leqq\sqrt{2},\ \sqrt{2}\leqq z\leqq\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

の 3 つの部分に分けて，それぞれの体積を求める．

(i) $0\leqq z\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき

立体は，底面の円の半径が 1，高さが $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円錐であるから，その体積 V_1 は

$$V_1=\pi\cdot1^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$$

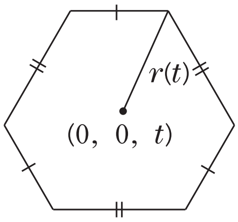
である．

(ii) $\sqrt{2}\leqq z\leqq\frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき

立体は (i) のときと同じであり，その体積 V_3 は V_1 と同じである．

(iii) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq z \leqq \sqrt{2}$ のとき

$z=t\ \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}\right)$ でのこの立方体の断面は，下図のようなすべての内角が $\dfrac{2\pi}{3}$ で隣り合う辺の長さの和がいずれも等しい六角形である．



このような六角形になることは，この六角形の各辺が，立方体の各面 (正方形) の対角線の一方に平行になることから分かる (すべての内角は等しくなる).

回転の中心 (点 $(0,\ 0,\ t)$) から，六角形の各頂点までの距離はいずれも等しく，これを t の関数と見て $r(t)$ とおく．すると，求める体積 V_2 は

$$V_2=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \pi\{r(t)\}^2\,dt \quad \cdots\cdots(*)$$

で与えられる．

ここで，$\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{2}\right)$ とおくと，直線 AD 上の点 E は，パラメータ s を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\left(1,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)+s\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{2}s,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}s,\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\end{aligned}$$

と表される．点 E が平面 $z=t$ 上にあるとき

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}s=t \iff \frac{\sqrt{2}}{2}s=t-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\iff s=\sqrt{2}t-1$$

であるから

$$\mathrm{E}\left(\frac{3-\sqrt{2}t}{2},\ \frac{-\sqrt{6}t+\sqrt{3}}{2},\ t\right)$$

である．$r(t)$ は，この E と $(0,\ 0,\ t)$ との距離であるから

$$\begin{aligned}\{r(t)\}^2&=\left(\frac{3-\sqrt{2}t}{2}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{6}t+\sqrt{3}}{2}\right)^2\\&=2t^2-3\sqrt{2}t+3\end{aligned}$$

である．よって，(*) より

$$\begin{aligned}V_2&=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \pi(2t^2-3\sqrt{2}t+3)\,dt\\&=\pi\left[\frac{2}{3}t^3-\frac{3\sqrt{2}}{2}t^2+3t\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}\\&=\frac{5\sqrt{2}}{12}\pi\end{aligned}$$

である．

以上より，求める体積 V は

$$\begin{aligned}V&=V_1+V_2+V_3\\&=\frac{\sqrt{2}}{6}\pi\cdot 2+\frac{5\sqrt{2}}{12}\pi\\&=\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi\end{aligned}$$

である．

＜解答終＞

＜コメント＞

数学科の川﨑です．今回の問題はいかがだったでしょうか？少し戸惑った人も多かったのではないかと思います．立体をイメージする部分，積分計算に持ち込む部分を分けて考えましょう．

以下，設問ごとに補足を述べます．

(1) ベクトルの直交条件を聞かれています．もちろん「内積 0」に持ちこみます．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ だけから t の値は 1 つに決まりますが，3 本が互いに垂直と言われていますので，1 つ見るだけでは不十分です．3 つの内積の式を立てましょう．

(2) O から伸びる 3 本のベクトルが (1) で分かりましたので，それらを「足し合わせ」ることで，残りの頂点は決まります．ここまでは落とせない問題です．

(3) この問題が勝負の分かれ目です．

(2) から，O と点 $\left(0,\ 0,\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ が z 軸上にあることが分かります．したがって，立方体をその対角線で回転させた立体の体積を求める問題ということになります．これは有名な出題テーマで，過

去に京大 (文系！) や東工大でも出題があります．

さて，求積についてですが，解答にあるように

$$0 \leqq z \leqq \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leqq z \leqq \sqrt{2},\ \sqrt{2} \leqq z \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

の 3 つの部分に分けて考えましょう．このうち

$$0 \leqq z \leqq \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2} \leqq z \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

の部分は断面が正三角形になり，回転してできる立体は円錐です．点 A から z 軸に下ろした垂線の足を H として，三角形 OAH が回ると，三角形 OBH，OCH に重なることを確認しましょう．

問題は $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq z \leqq \sqrt{2}$ のときです．このときの立体を「円柱」や「円錐台」とするのは大間違いです．絶対にやってはいけない間違いですので，やってしまった人は気をつけましょう．なぜ「円柱」「円錐台」ではないかというと，$\{r(t)\}^2$ が t の 2 次式になっていることが理由です．ここが定数または t の 1 次式にならないと「円柱」「円錐台」とは言えません．実際，この立体の $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq z \leqq \sqrt{2}$ の部分と yz 平面の交わりを考えてみましょう．この交わりは

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{2t^2 - 3\sqrt{2}t + 3} \\ z = t \end{cases}$$

とパラメータ表示され，t を消去すると

$$y^2 = 2z^2 - 3\sqrt{2}z + 3$$

となり，双曲線になることが分かります．

「回転軸にねじれた線分が作る曲面は双曲面」

というのは，よく出てきますので覚えてください．

話を問題に戻します．というわけで

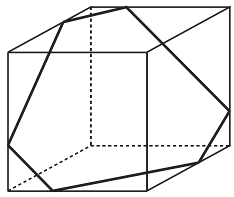
$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq z \leqq \sqrt{2}$ の部分の体積は積分で求めることになります．

「軸に垂直に切る」

「回す前に切る」

の 2 つの原則にしたがって，まず断面を考察します．この断面の考察が本問の最大の難所です．解答中の面 OADC を見ましょう．このとき，A，C の z 座標が等しいことから，平面 $z=t$ とこの面の交わりは，対角線 AC に平行な線分となることが分かります．これをすべての面で行うと，断面は解答にあるような六角形です．これが分かれば，点 $(0,\ 0,\ t)$ と六角形の 1 つの頂点までの距離が分かれば断面積が求まり，体積を得ます．結局，線分 AD を回してできる双曲面の作る立体の体積が求めるものになります．

断面については，下図の向きに見た方が，理解しやすいかもしれません．空間図形では，見やすい向きに図を描くことも常に意識するようにしましょう．



最後にもう 1 問練習問題をつけておきます．体積を求める練習に使ってください．

問

xyz 座標空間内に 2 点 O$(0,\ 0,\ 0)$ と P$(5,\ 0,\ 0)$ がある．

(1)　2 点 A，B が条件 OA$=4$，AB$=3$ を満たして動くとき，点 B が動きうる領域を式で表せ．

(2)　3 点 A，B，C が条件

$$\mathrm{OA}=4,\ \mathrm{AB}=3,\ \mathrm{BC}=\mathrm{CP}=\sqrt{11}$$

を満たして動くとき，点 B の動きうる領域の体積を求めよ．

＜解答＞

(1)　点 A を固定すると，点 B は A 中心，半径 3 の球面上を動く．さらに，点 A は球面 $x^2+y^2+z^2=16$ 上を動くので，点 B の動きうる領域を式で表すと

$$(4-3)^2 \leqq x^2+y^2+z^2 \leqq (4+3)^2$$

$$\iff \quad 1 \leqq x^2+y^2+z^2 \leqq 49 \quad \cdots\cdots ①$$

である．

(2)　　$\mathrm{BC}=\mathrm{CP}=\sqrt{11}$

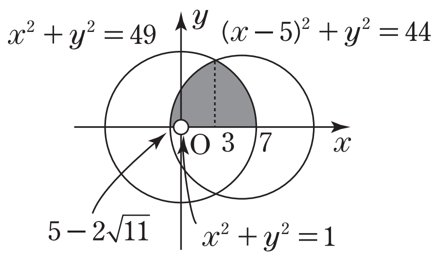
を満たす点 B の動きうる領域は，(1) と同様に考えて

$$(\sqrt{11}-\sqrt{11})^2 \leqq (x-5)^2+y^2+z^2 \leqq (\sqrt{11}+\sqrt{11})^2$$

$$\iff \quad 0 \leqq (x-5)^2+y^2+z^2 \leqq 44 \quad \cdots\cdots ②$$

で与えられる.

よって，点 B の動きうる領域は ① かつ ② で表される．この領域は下図の色付き部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体である.



したがって，求める体積は

$$\int_{5-2\sqrt{11}}^{3} \pi\{44-(x-5)^2\}dx + \int_{3}^{7}\pi(49-x^2)dx - \frac{4\pi}{3}\cdot 1^3$$

$$= \pi\left[\,44x-\frac{1}{3}(x-5)^3\,\right]_{5-2\sqrt{11}}^{3} + \pi\left[\,49x-\frac{1}{3}x^3\,\right]_{3}^{7} - \frac{4}{3}\pi$$

$$= \pi\left(132+\frac{8}{3}-220+88\sqrt{11}-\frac{88\sqrt{11}}{3}\right) + \pi\left(343-\frac{343}{3}-147+9\right)-\frac{4}{3}\pi$$

$$= \frac{12+176\sqrt{11}}{3}\pi$$

である.

＜解答終＞

いかがだったでしょうか．回転体とは問題文に書いてありませんが，対称性から図形が回転体になることに気付きたい問題です.

では，今回はここまでにしたいと思います．また次回をお楽しみに.

＜数学科　川﨑＞