強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第１問（数Ⅲ）

a を実数とし，数列 $\{x_n\}$ を次の漸化式によって定める．

$$x_1=a,\quad x_{n+1}=x_n+x_n^2\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　$a>0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ が発散することを示せ．

(2)　$-1<a<0$ のとき，すべての正の整数 n に対して，$-1<x_n<0$ が成り立つことを示せ．

(3)　$-1<a<0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の極限を調べよ．

<解答>

(1)　$a>0$ とする．帰納的に

$$x_n>0\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

である．すると

$$x_{n+1}=x_n+x_n^2>x_n$$

であるから，数列 $\{x_n\}$ は単調増加列で

$$x_n \geqq x_1=a$$

であり

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=x_n+x_n^2\\ &\geqq x_n+a^2 \end{aligned}$$

である．これより

$$x_n \geqq x_1+(n-1)a^2=a+(n-1)a^2$$

である．$a>0$ より

$$\lim_{n\to\infty}\{a+(n-1)a^2\}=\infty$$

であるから，追い出しの原理より

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$$

であり，数列 $\{x_n\}$ は発散する．

(2)　$-1<a<0$ とする．$-1<x_n<0$ が成り立つことを，数学的帰納法で示す．

(I)　$n=1$ のとき

仮定より $-1<a<0$ であるから

$$-1<x_1<0$$

である．

(II)　$n=k\ (k\geqq 1)$ のとき

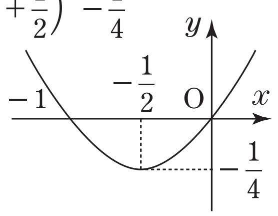
$$-1<x_k<0$$

と仮定する．

$$\begin{aligned} x_{k+1}&=x_k+x_k^2\\ &=\left(x_k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

である．

$$y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$



よって，上の $y=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$ のグラフから，

$-1<x_k<0$ のとき

$$-\frac{1}{4}\leqq x_{k+1}<0$$

である．したがって

$$-1<x_{k+1}<0$$

が成り立つ．よって，$n=k+1$ のときも示すべき不等式が成り立つ．

以上 (I)，(II) より

$$-1<x_n<0$$

であることが示された．

(3)　$-1<a<0$ とする．(2) より

$$-1<x_n<0\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

である．これと

$$x_{n+1}=x_n+x_n^2>x_n$$

より

$$-1<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_n<0$$

である．よって

$$0<x_n^2<x_{n-1}^2<\cdots\cdots<x_1^2<1$$

が成り立つ．

すると，n：十分大として

$$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$$

に対して

$$x_{k+1}-x_k=x_k^2>x_n^2$$

である．足し合わせて

$$\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)>(n-1)x_n^2$$

$$\iff \quad x_n-x_1>(n-1)x_n^2$$

$$\iff \quad x_n^2<\frac{x_n-x_1}{n-1} \quad (\because \quad n-1>0)$$

を得る．これと $x_n<0$ より

$$0<x_n^2<\frac{-x_1}{n-1}=-\frac{a}{n-1}$$

である．

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{a}{n-1}\right)=0$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}x_n^2=0$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}x_n=0$$

である．

＜解答終＞

＜コメント＞

今回の問題はいかがだったでしょうか？「解けない漸化式と極限」という頻出テーマの問題ですが，漸化式の扱い方が難しかったのではないかと思います．

以下設問ごとに補足を述べます．

(1)　いきなり取り組みにくい問題です．例えば $a=1$ とすると

$$\{x_n\}:1,\ 2,\ 6,\ 42,\ 1806,\ \cdots\cdots$$

となり，$a=\dfrac{1}{2}$ とすると

$$\{x_n\}:\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{21}{16},\ \frac{777}{256},\ \frac{802641}{65536},\ \cdots\cdots$$

となります．いずれも，$\{x_n\}$ がどんどん増えて ∞ に発散していくと予想できると思います．

実際，増加するのは

$$x_{n+1}=x_n+x_n^2>x_n \quad (\because \quad x_n>0)$$

から簡単に示せます．

ここで，ありがちな間違いは

「$\{x_n\}$ は単調増加なので，∞ に発散する」

という議論です．これは成り立ちません．例えば数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=1-\frac{1}{n} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

と定めると，$\{a_n\}$ は単調増加ですが

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1\neq\infty$$

です．単調増加だけではこの問題の結論は導けないことに注意しましょう．∞ に発散することを示すためには，何らかの不等式を作って評価していくことになります．

単調増加ということで，数列 $\{x_n\}$ に現れる項の中で最小のものは x_1 です．すなわち

$$x_n\geqq x_1=a$$

が成り立ちます．これより

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=x_n+x_n^2\\&\geqq x_n+a^2\end{aligned}$$

と x_n^2 の項を a^2 で下からおさえることで，等差型の不等式が作れます．ここから

$$x_{n+1}=x_n+a^2$$

の漸化式を解く要領で不等式を作れば，追い出しの原理から ∞ に発散することが示せます．

＜解答＞では等差型にもっていきましたが，等比型にもっていくこともできます．

＜(1) の別解＞

$a>0$ とする．帰納的に

$$x_n>0 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

である．すると

$$x_{n+1}=x_n+x_n^2>x_n$$

であるから，数列 $\{x_n\}$ は単調増加列で

$$x_n\geqq x_1=a$$

であり

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=x_n(x_n+1)\\&\geqq(a+1)x_n\end{aligned}$$

$$(\because \quad x_n>0)$$

である．これより

$$x_n \geqq (a+1)^{n-1}x_1=(a+1)^{n-1}a$$

であり

$$a+1>1,\ a>0$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}(a+1)^{n-1}a=\infty$$

である．よって，追い出しの原理より

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$$

であり，数列 $\{x_n\}$ は発散する．

＜別解終＞

いずれの解法にせよ，$x_n \geqq a$ を使って，見慣れた形にもっていくことが大切です．感覚を身につけてください．

(2)　「漸化式　解けないときは　帰納法」

です．この問題のような数列の有界性を示す問題では数学的帰納法を用いることが多々あります．

漸化式　→　x_k から x_{k+1} を作る

数学的帰納法　→　$n=k$ のときを仮定して $k+1$ のときを示す

なので，相性が良いのが分かると思います．

帰納法では，(II) がメインの証明です．

$-1<x_k<0$ を仮定して $-1<x_{k+1}<0$ を示します．

このとき，$f(x)=x+x^2$ として

$$-1<x_k<0 \quad \Rightarrow \quad f(-1)<f(x_k)<f(0)$$
$$(0<x_{k+1}<0)$$

という謎の証明をしないように気を付けてください．$f(x)$ は単調ではないので，端を代入しても値域は出ません．2 次関数なので，グラフを利用して値域を見ましょう．

(3)　とりあえず $a=-\dfrac{1}{2}$ ぐらいで実験してみると

$$\{x_n\}: -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{3}{16},\ -\frac{39}{256},\ -\frac{8463}{65536},\ \cdots\cdots$$

となり，0 に収束かな？と予想できます．予想はできるのですが，それを示すのが難しいです．

解答では，(1) 同様に単調性をまず見ました．単調増加であることが分かります．(2) が良いヒントになっていて，ここから

$$0<x_n^2<x_{n-1}^2<\cdots\cdots<x_1^2<1$$

が導けます．(1) では x_1 が最小であることを使いましたが，ここではこの n 個の中で x_n^2 が最小であることを使って不等式を作っていきます．

与えられた漸化式から

$$x_{k+1}-x_k=x_k^2$$

と左辺を階差の形にして $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ で足すことで

$$x_n-x_1=\sum_{k=1}^{n-1}x_k^2$$

を得ます．

$$x_k^2>x_n^2 \quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

を使うと，この右辺を

$$\sum_{k=1}^{n-1}x_k^2>(n-1)x_n^2$$

とできます．$-1<x_n<0$ なので，x_n や x_n^2 はたいして大きくありません．この不等式の右辺に出てくる $n-1$ が x_n や x_n^2 と比べてかなり大きいことから，はさみうちにもっていくことができます．

＜解答＞では，このように数列の有界性を使って不等式を作りました．これとは別に，逆数を取って不等式を作ることもできます．

＜ (3) の別解＞

$$x_{n+1}=x_n+x_n^2$$

において，両辺は (2) より 0 ではないので，逆数をとって

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n(x_n+1)}$$

$$\iff \quad \frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n+1}$$

である．

(2) より

$$\frac{1}{x_n+1}>1$$

であるから

$$\frac{1}{x_{n+1}}<\frac{1}{x_n}-1$$

である．これより

$$\frac{1}{x_n}<\frac{1}{x_1}-(n-1)=\frac{1}{a}-n+1$$

である．この両辺は負であるから

$$\frac{1}{\frac{1}{a}-n+1}<x_n<0$$

である．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a}-n+1}=0$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

である．

＜別解終＞

この解法は，逆数をとり，部分分数分解にもっていくことがポイントとなります．(2) が

$$x_{n+1}=x_n+x_n^2$$

の両辺が 0 にならないことを示していると気付けば逆数がとれますが，思いつくのはなかなか大変です．極限の問題では，式変形が思いつかないと手も足も出なくなってしまいます．難易度が高いですが，このレベルに対応できるようになると非常に強いです．

逆数をとる練習問題を最後に 1 問出題しておきます．これも考えてみてください．

問

数列 $\{a_n\}$ は次を満たすとする．

$$a_1=6$$

$$a_{n+1}=1+a_1a_2\cdots\cdots a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　2 以上の自然数 n に対して

$$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$$

が成り立つことを証明せよ．

(2)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ を求めよ．

＜解答＞

(1)　$a_{n+1}-1=a_1a_2\cdots\cdots a_n$

より，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n-1=a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1}$$

である．よって

$$\begin{aligned}a_{n+1}-1&=a_n\cdot a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1}\\&=a_n(a_n-1)\end{aligned}$$

である．

(2)　帰納的に $a_n>0$ であるから，与えられた関係式と $a_1=6$ から，$a_n>1$ が成り立つ．

すると，(1) から，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}-1}&=\frac{1}{a_n(a_n-1)}\\&=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}\end{aligned}$$

$$\iff\quad \frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k}&=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{a_k-1}-\frac{1}{a_{k+1}-1}\right)\\&=\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}\\&=\frac{1}{6}-\frac{1}{a_{n+1}-1}\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}&=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{a_{n+1}-1}\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{a_{n+1}-1}\end{aligned}$$

である．

ここで

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=1+a_1a_2\cdots\cdots a_n\\&\geqq 1+a_n\end{aligned}$$

であるから

$$a_n\geqq a_1+(n-1)=n+5$$

である．これより

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3}$$

である．　＜解答終＞

強者の戦略

いかがだったでしょうか？この問題も逆数をとって部分分数分解にもっていく流れが大事です．a_n が無限大に発散するのは容易に分かると思いますが，示すにはここでも等差型の評価を使います．

それでは今回はここまでにしたいと思います．秋のシーズンが始まりますが，飽きずに勉強を続けてください．また次回をお楽しみに．

（数学科　川﨑）