強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第１問（数Ⅲ）

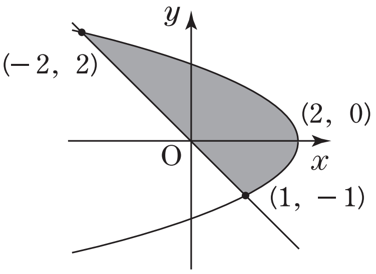
xy 平面内の図形

$$S:\begin{cases} x+y^2 \leqq 2 \\ x+y \geqq 0 \end{cases}$$

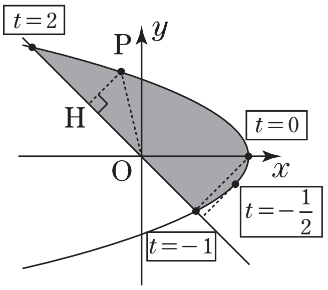
を考える．図形 S を直線 $y=-x$ の周りに１回転して得られる立体の体積 V を求めよ．

＜解答＞

図形 S は下図色付き部分である (境界線を含む).



直線 $x+y=0$ を l とし，その方向ベクトルとして，$\vec{l}=(-1,\ 1)$ をとる．また，放物線 $x+y^2=2$ を C とし，C 上に点 $\mathrm{P}(2-t^2,\ t)$ $(-1 \leqq t \leqq 2)$ をとる．さらに，点 P から直線 l に下ろした垂線の足を H とする．



$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\vec{l}$ 方向への正射影ベクトルであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\vec{l}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\vec{l}\right|^2}\vec{l}=\frac{t^2+t-2}{2}\vec{l}$$

である．

$\left|\vec{l}\right|=\sqrt{2}$ であるから

$$u=\frac{t^2+t-2}{\sqrt{2}}$$

とおくと，u は OH の符号付き長さを与える．

$$u=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4\sqrt{2}}$$

であるから，u は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 : $-\dfrac{9}{4\sqrt{2}}$

をとることに注意する．

$$r=\mathrm{PH}=\frac{\left|2-t^2+t\right|}{\sqrt{2}}=\frac{(t+1)(2-t)}{\sqrt{2}}$$
$(\because\ -1 \leqq t \leqq 2)$

とし

$-\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 2$ のときの r を r_1

$-1 \leqq t \leqq -\dfrac{1}{2}$ のときの r を r_2

とすると，求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V&=\int_{-\frac{9}{4\sqrt{2}}}^{2\sqrt{2}}\pi r_1^2du-\int_{-\frac{9}{4\sqrt{2}}}^{-\sqrt{2}}\pi r_2^2\,du \\
&=\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\pi\cdot\frac{(t-2)^2(t+1)^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(2t+1)dt \\
&\qquad-\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\pi\cdot\frac{(t-2)^2(t+1)^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(2t+1)dt \\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(t-2)^2(t+1)^2(2t+1)dt \\
&\qquad+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(t-2)^2(t+1)^2(2t+1)dt \\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{2}(t-2)^2(t+1)^2(2t+1)\,dt \quad \cdots\cdots(*) \\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_{0}^{3}(s-3)^2s^2(2s-1)\,ds \quad (s=t+1) \\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_{0}^{3}(2s^5-13s^4+24s^3-9s^2)ds \\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{3}s^6-\frac{13}{5}s^5+6s^4-3s^3\right]_0^3 \\
&=\frac{81\sqrt{2}}{20}\pi
\end{aligned}$$

である．

＜解答終＞

＜コメント＞

数学科の川崎です．今回は体積の斜軸回転の問題を出題しました．一時期あまり出題されず影を潜めていましたが，近年また見かけるようになりました．

本問は東北大学の 2018 年の問題を，難易度を上げるために改題したものです．出題時のコメントに「気をつけないといけない箇所がある」と書いたのですが気付けたでしょうか？

斜軸回転ですので，解答中にあるように u ($=\mathrm{OH}$ の符号付き長さ) をとって

$$\int \pi \mathrm{PH}^2\,du$$

と体積を立式します．これを

$$\int \pi \mathrm{PH}^2\,dt$$

としてしまうと正しい体積の値は出ません．断面が直線 $x+y=0$ に垂直なのに，x 軸に垂直な方向の厚み (dt) をつけて積分してもダメです．これが大前提です．

本問の難しい箇所は，$-1 \leqq t \leqq -\dfrac{1}{2}$ の部分で，図のように「すき間」ができることです．すなわち，u が単調になっておらず，$-1 \leqq t \leqq -\dfrac{1}{2}$ の部分で作られる回転体の体積を後から引かなくてはいけません．これに気付くには，解答のように $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を正射影ベクトルで捉え，その係数の増減を調べていく必要があります．

東北大学の原題は，図形 S に条件 $x-y \leqq 2$ が付いていました．これがあると，$0 \leqq t \leqq 2$ として良く，「すき間」はできません．難易度を上げたのは，この「すき間」の有無を議論してほしかったからです．

このような「すき間」のある図形の面積や体積を求める場合は．解答中にあるように，t の値の範囲によって PH の長さを r_1，r_2 と区別して立式していくのが定石です．

$$V=\int_{-\frac{9}{4\sqrt{2}}}^{2\sqrt{2}} \pi r_1^2\,du-\int_{-\frac{9}{4\sqrt{2}}}^{-\sqrt{2}} \pi r_2^2\,du$$

となります．これを t に置換していくことになります．

$$du=\frac{1}{\sqrt{2}}(2t+1)\,dt$$

$$r_1:\ \begin{array}{c|c} u & -\dfrac{9}{4\sqrt{2}} \to 2\sqrt{2} \\ \hline t & -\dfrac{1}{2} \to 2 \end{array}$$

$$r_2:\ \begin{array}{c|c} u & -\dfrac{9}{4\sqrt{2}} \to -\sqrt{2} \\ \hline t & -\dfrac{1}{2} \to -1 \end{array}$$

を使うと，V は t の積分で表せます．

さらに

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(\cdots)\,dt-\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}(\cdots)\,dt&=\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(\cdots)\,dt+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(\cdots)\,dt\\&=\int_{-1}^{2}(\cdots)\,dt\end{aligned}$$

と積分が 1 つにまとめられることもおさえておきましょう．これを知っているか知らないかで計算量が大きく変わってきます．

最後の積分 $(*)$ は，$t+1=s$ とおいて計算しました．自然数 m，n に対して，積分公式

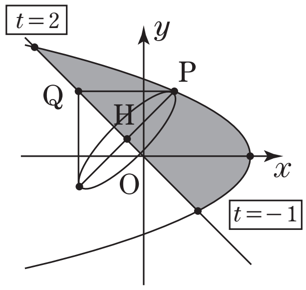
$$\begin{aligned}&\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n\,dx\\&=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(b-a)^{m+n+1} \quad \cdots\cdots(**)\end{aligned}$$

を知っていれば，次のように計算できます．

$$\begin{aligned}(*)&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{2}(t-2)^2(t+1)^2(2t+1)\,dt\\&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{2}(t-2)^2(t+1)^2\{2(t+1)-1\}\,dt\\&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(2\int_{-1}^{2}(t+1)^3(2-t)^2\,dt\right.\\&\qquad\left.-\int_{-1}^{2}(t+1)^2(2-t)^2dt\right)\\&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(2\cdot\frac{3!\cdot 2!}{6!}\cdot 3^6-\frac{2!\cdot 2!}{5!}\cdot 3^5\right)\\&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{3^5-3^4}{10}\right)\\&=\frac{81\sqrt{2}}{20}\pi\end{aligned}$$

さらに，次のように考えることもできます（**傘型分割**と呼ばれる考え方です）.

＜別解１＞



$\mathrm{P}(2-t^2,\ t)$，$\mathrm{Q}(t,\ t)$ とする．PQ を直線 l の周りに１回転してできる円錐の側面積は

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PH}\cdot\pi &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}(2-t^2-t)^2\\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}(t+1)^2(2-t)^2\end{aligned}$$

である．よって，t が Δt だけ動いたとき，体積の増分を ΔV とおくと

$$\Delta V \fallingdotseq \frac{\pi}{\sqrt{2}}(t+1)^2(2-t)^2\Delta t$$

である（t が動いても側面積は変わらないと近似した）．これより

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \fallingdotseq \frac{\pi}{\sqrt{2}}(t+1)^2(2-t)^2$$

であり，$\Delta t \to 0$ として

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(t+1)^2(2-t)^2$$

が成り立つ．したがって，求める体積 V は

$$\begin{aligned}V &= \int_{-1}^{2}\frac{\pi}{\sqrt{2}}(t+1)^2(2-t)^2\,dt\\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2!\cdot 2!}{5!}\cdot 3^5\\ &= \frac{81\sqrt{2}}{20}\pi\end{aligned}$$

である（最後の積分には，積分公式 $(**)$ を用いた）.

＜別解終＞

この解法の優れたところは，t が $-1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，線分 PQ は y 軸正方向に上がり続けるので，積分を１つで立式できます．さらに，被積分関数が＜解答＞に比べシンプルになります．積分公式 $(**)$ が直接使える形なのも大きく，計算量をぐっと減らせます．いきなりの立式は減点の可能性があるので，どのような近似をしているか説明する必要がありますが，斜軸回転の問題には非常に有効です．使いこなせる人は是非使ってください.

もう１つ，回転軸を x 軸に重なるように回転する解法もあります.

＜別解２＞

放物線 $C: x+y^2=2$ を原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転して考える．その際，点 $(x,\ y)$ が $(X,\ Y)$ にうつるとすると

$$\begin{aligned}& x+yi=(X+Yi)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ \iff\ & x+yi=(X+Yi)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\\ \iff\ & x+yi=\frac{X+Y}{\sqrt{2}}+\frac{Y-X}{\sqrt{2}}i\end{aligned}$$

より，C は

$$\begin{aligned}& \frac{X+Y}{\sqrt{2}}+\frac{(Y-X)^2}{2}=2\\ \iff\ & Y^2-(2X-\sqrt{2})Y+X^2+\sqrt{2}X-4=0\end{aligned}$$

である．これを Y の２次方程式と見て，判別式を D とすると

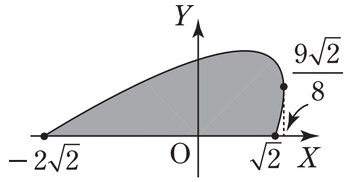
$$\begin{aligned}& D=(2X-\sqrt{2})^2-4(X^2+\sqrt{2}X-4)\geqq 0\\ \iff\ & -8\sqrt{2}X+18\geqq 0\\ \iff\ & X\leqq\frac{9\sqrt{2}}{8}\end{aligned}$$

であり，このもとで

$$Y=\frac{2X-\sqrt{2}\pm\sqrt{18-8\sqrt{2}X}}{2}$$

である.

この回転で，点 $(-2,\ 2)$，$(1,\ -1)$ はそれぞれ $(-2\sqrt{2},\ 0)$，$(\sqrt{2},\ 0)$ にうつる.



$$Y_1 = \frac{2X - \sqrt{2} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}X}}{2}$$
$$Y_2 = \frac{2X - \sqrt{2} - \sqrt{18 - 8\sqrt{2}X}}{2}$$

とおくと，求める体積 V は

$$V = \pi\int_{-2\sqrt{2}}^{\frac{9\sqrt{2}}{8}} Y_1^2\,dX - \pi\int_{\sqrt{2}}^{\frac{9\sqrt{2}}{8}} Y_2^2\,dX$$

で与えられる．

$$Y_1^2 = X^2 - 3\sqrt{2}X + 5 + \frac{1}{2}(2X - \sqrt{2})\sqrt{18 - 8\sqrt{2}X}$$
$$Y_2^2 = X^2 - 3\sqrt{2}X + 5 - \frac{1}{2}(2X - \sqrt{2})\sqrt{18 - 8\sqrt{2}X}$$

を使って積分を計算すると

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{\frac{9\sqrt{2}}{8}} Y_1^2\,dX = \frac{3125}{768}\sqrt{2}$$
$$\int_{\sqrt{2}}^{\frac{9\sqrt{2}}{8}} Y_2^2\,dX = \frac{73}{3840}\sqrt{2}$$

となる．(計算は各自頑張ってください．

$$\int (2X - \sqrt{2})\sqrt{18 - 8\sqrt{2}X}\,dX$$

の計算は

$$\sqrt{18 - 8\sqrt{2}X} = t$$

と置換しましょう)．よって

$$V = \pi\left(\frac{3125}{768}\sqrt{2} - \frac{73}{3840}\sqrt{2}\right) = \frac{81\sqrt{2}}{20}\pi$$

である．

＜別解終＞

計算はとんでもないことになりますが，そこを乗り切れば解答にたどり着くことはできます．方針としては頭に入れておきたい解法です．

それでは，今回も最後に練習問題を１問出します．回転体の体積の問題で，パラメータ表示された有名曲線です．積分の立式に気を付けて挑戦してみてください．

問

曲線 C は，θ を媒介変数として

$$\begin{cases} x = a(1 + \cos\theta)\cos\theta \\ y = a(1 + \cos\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (a > 0,\ -\pi \leqq \theta \leqq \pi)$$

と表されている．曲線 C を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．

＜解答＞

$$x = x(\theta)\ ,\ y = y(\theta)$$

とすると

$$x(-\theta) = x(\theta)\ ,\ y(-\theta) = -y(\theta)$$

より，曲線 C のグラフは $-\pi \leqq \theta \leqq 0$ の部分と $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分が x 軸対称である．また

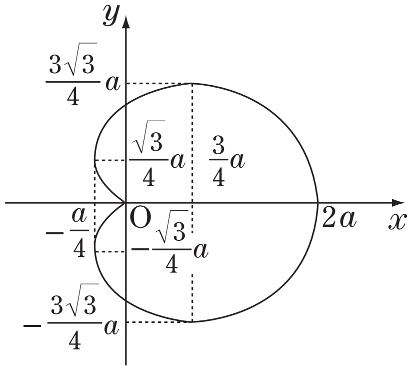
$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= a\left\{-\sin\theta\cos\theta + (1 + \cos\theta)(-\sin\theta)\right\} \\ &= -a\sin\theta(2\cos\theta + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= a\left\{-\sin^2\theta + (1 + \cos\theta)\cos\theta\right\} \\ &= a(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) \\ &= a(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) \end{aligned}$$

であるから，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における増減表は

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
x	$2a$	↘	$\frac{3}{4}a$	↘	$-\frac{1}{4}a$	↗	0
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}a$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}a$	↘	0

となる．よって，曲線 C の概形は次図のようになる．



$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ の部分の y を y_1

$\dfrac{2}{3}\pi \leqq \theta \leqq \pi$ の部分の y を y_2

とすると，求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-\frac{a}{4}}^{2a} y_1^2\,dx - \pi\int_{-\frac{a}{4}}^{0} y_2^2\,dx \\
&= \pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0} y_1^2\frac{dx}{d\theta}d\theta - \pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} y_2^2\frac{dx}{d\theta}d\theta \\
&= -\pi\int_0^{\pi} y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta \\
&= \pi a^3\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2(2\cos\theta+1)\sin^3\theta\,d\theta
\end{aligned}$$

と表される．ここで，$\cos\theta = t$ とおくと

$\dfrac{dt}{d\theta} = -\sin\theta$，

θ	$0 \longrightarrow \pi$
t	$1 \longrightarrow -1$

であるから，$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ に注意して

$$\begin{aligned}
V &= \pi a^3\int_1^{-1}(1+t)^2(1-t^2)(2t+1)\cdot(-dt) \\
&= \pi a^3\int_{-1}^{1}(1+t)^2(1-t^2)(2t+1)\,dt \\
&= \pi a^3\int_{-1}^{1}(1+2t+t^2)(1-t^2)(2t+1)\,dt \\
&= \pi a^3\int_{-1}^{1}(2t^3+5t^2+4t+1)(1-t^2)\,dt \\
&= 2\pi a^3\int_0^1(5t^2+1)(1-t^2)\,dt \\
&= 2\pi a^3\int_0^1(-5t^4+4t^2+1)\,dt \\
&= 2\pi a^3\left[-t^5+\frac{4}{3}t^3+t\right]_0^1 \\
&= 2\pi a^3\cdot\left(-1+\frac{4}{3}+1\right) \\
&= \frac{8}{3}\pi a^3
\end{aligned}$$

である．　　　　＜解答終＞

正しい立式ができましたか？この問題も y_1，y_2 を区別して立式し，その後 θ の式にもっていきます．積分を 1 つにまとめて，$\cos\theta = t$ と置換することで計算できる形になります．

それでは今回はここまでにしたいと思います．今年度，このページを 3 回担当しました．読んでくださった皆さん，ありがとうございました．

受験生の皆さんは，受験まで残り少ないですが，悔いのないよう戦い抜いてください．良い結果が出ることを祈っています．

＜数学科　川﨑＞