強者の戦略

それでは，前回の解答です．まずは漸化式を解く方針でやってみます．解答中の (※) まではIAIIBの範囲です．

第1問（数Ⅲ）

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定めるとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

＜解答＞

方程式 $x=\dfrac{1}{x}+1$ の2解を

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

とおく．

$$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+1$$

$$\alpha=\frac{1}{\alpha}+1$$

より，辺々差をとって

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{\alpha}$$

$$\iff\quad a_{n+1}-\alpha=-\frac{a_n-\alpha}{\alpha a_n}\quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．同様にして

$$a_{n+1}-\beta=-\frac{a_n-\beta}{\beta a_n}\quad \cdots\cdots②$$

である．

ここで，$a_1\fallingdotseq\alpha$ と ① から

$$a_n\fallingdotseq\alpha\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

である．よって，② の各辺を ① の各辺で割って

$$\frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$$

が成り立つ．ゆえに，数列 $\left\{\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}\right\}$ は公比 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ の等比数列であり

$$\begin{aligned}\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}&=\left(\frac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}\\&=\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}\\&=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}\\&=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n}\end{aligned}$$

である (途中の変形には

$$1-\alpha=-\frac{1}{\alpha},\ 1-\beta=-\frac{1}{\beta}$$

を用いた)．

よって

$$\frac{\alpha}{\beta}=\gamma$$

とおくと

$$\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}=\gamma^n$$

$$\iff\quad a_n-\beta=\gamma^n(a_n-\alpha)$$

$$\iff\quad (\gamma^n-1)a_n=\gamma^n\alpha-\beta$$

$$\iff\quad a_n=\frac{\gamma^n\alpha-\beta}{\gamma^n-1}\quad (\because\ \ \gamma^n\fallingdotseq 1)$$

である (※　ここまでIAIIB)．

$$|\gamma|<1$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

である．

＜解答終＞

次に，漸化式を解かずに極限を出してみましょう．そのために，まず極限値を予想します．この部分は答案に書く必要はないので，先に書いておきます．

＜予想＞

極限が存在すると仮定すると，極限値 β は

$$\beta=\frac{1}{\beta}+1,\ \beta>0$$

を満たす．よって

$$\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

と予想できる．

＜予想終＞

では，この予想を示していきます．別解です．

＜別解＞

極限値は $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ と予想できる．以下，これを示す．$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\beta$ とおく．

与えられた漸化式より

$$a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{a_n}+1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\iff\quad a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{a_n}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\iff\quad a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{a_n}-\frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

であるから

$$a_{n+1}-\beta=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{\beta}$$

$$\iff\quad a_{n+1}-\beta=\frac{\beta-a_n}{\beta a_n}$$

である．これより

$$\left|a_{n+1}-\beta\right|=\frac{1}{a_n\beta}\left|a_n-\beta\right|$$

$$(\because\ \ a_n>0,\ \ \beta>0)$$

が成り立つ．

ここで，帰納的に $a_n \geqq 1$ であるから

$$\left|a_{n+1}-\beta\right|\leqq\frac{1}{\beta}\left|a_n-\beta\right|$$

であり，n が十分大のとき，この不等式を繰り返し用いて

$$\begin{aligned}(0\leqq)\left|a_n-\beta\right| &\leqq \frac{1}{\beta}\left|a_{n-1}-\beta\right|\\ &\leqq\cdots\cdots\\ &\leqq\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n-1}\left|a_1-\beta\right|\end{aligned}$$

である．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n-1}\left|a_1-\beta\right|=0$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_n-\beta\right|=0$$

である．すなわち

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

である．

＜別解終＞

＜コメント＞

数学科の川﨑です．今年度もこのページをよろしくお願いします．

さて，今回は漸化式から極限を求める問題を出題しました．よくあるテーマの問題ですが，誘導をあえてカットしたので，自分でゴールまでの筋道を立てていかなくてはいけません．その点が難しかったかなと思います．

以下，解法に関しての補足です．

まず，＜解答＞の方です．

この漸化式が解ける漸化式であることが分かっている人なら，「解いてしまえば極限は出るな」と思えますね．解き方を知らなかった人は是非マスターしてください．

特性方程式として，a_{n+1}，a_n を α に変えた式を考えます．この式を両辺から引くことで

$$a_{n+1}-\alpha=-\frac{a_n-\alpha}{\alpha a_n}\quad\cdots\cdots①$$

という「等比っぽい」式を作ります．右辺の分母の a_n が邪魔ですね．もう1つの特性解 β でも同じ式を作り，比をとることで，この分母の a_n を消すことができます．比をとる際は，0で割ることはできないので

$$a_n \fallingdotseq \alpha$$

を必ず確認しましょう．

この問題では特性解が２つあったので，式を２つ作って比をとれましたが，重解だったらどうでしょう？このように特殊な場合を詰めて考えることができる人は数学に強くなれる人です(是非なってください)．特性方程式が重解を持つ場合は，式が１つしか作れませんが，① の両辺の逆数をとることで

$$\frac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{-\alpha a_n}{a_n-\alpha}$$

$$\iff \quad \frac{1}{a_{n+1}-\alpha}=-\frac{\alpha^2}{a_n-\alpha}-\alpha$$

と変形できます．あとは，$b_n=\dfrac{1}{a_n-\alpha}$ と置き換えれば解ける漸化式になります．この変形もしっかりおさえましょう．

話を戻すと，一般項は

$$a_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^n-\beta^n}$$

という形で書けます．この不定形からの変形は

分母の最大公比で割る

でした．

$$|\alpha|<|\beta|$$

ですので，β^n で割ることで，a_n の極限を求めることができます．

次に，＜別解＞についてです．

極限を求めるだけなので，一般項を求めなくても不等式が作れれば良い，という割り切った解法です．この場合，まずは極限値を予想する必要があります．＜予想＞という形で分けて書きましたが，答案に「極限を β とおくと…」などとは書かないでください．存在するかどうかも分からないので，極限をおいて議論するのは NG です．

「収束するならば」その極限値は β ということが言えますので，それを示していきます．そのために $a_n-\beta$ が0に収束することを示します．漸化式を使って

$$a_{n+1}-\beta=\blacksquare\,(a_n-\beta) \quad \cdots\cdots (*)$$

の形を作りましょう(特性方程式の感覚があれば，この形に変形できることは分かります)．あとは，■の部分を評価して

$$\left|a_{n+1}-\beta\right|<r\left|a_n-\beta\right| \quad (0<r<1)$$

の形にもっていければ，「繰り返し用いて…」の形の不等式（等比型）ですので，はさみうちの原理にもっていけます．

この問題は，$\sqrt{\ }$ の式変形(有理化)をすることで，(*) の形を作れました．もっと複雑な関数になったときに使う手法も紹介しておきます．

＜別解その２＞

極限値は $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ と予想できる．以下，これを示す．

帰納的に $a_n \geqq 1$ である．すると

$$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+1 \leqq 2$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

であるから，$a_1=1<2$ と合わせて

$$1 \leqq a_n \leqq 2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つ．すると

$$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+1 \geqq \frac{3}{2}$$

であるから

$$\frac{3}{2} \leqq a_n \leqq 2 \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$$

である．

さらに，$a_n=\beta$ となる $n\,(\geqq 2)$ が存在すると仮定すると

$$\beta=\frac{1}{a_{n-1}}+1 \iff a_{n-1}=\frac{1}{\beta-1}=\beta$$

となり，これを繰り返すことで $a_1=\beta$ となるので矛盾する．よって，すべての自然数 n で

$$a_n \neq \beta$$

である．

ここで

$$f(x)=\frac{1}{x}+1 \quad (x>0)$$

とおくと，$f(x)$ は微分可能であり

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

である．

$$a_{n+1}=f(a_n),\ \beta=f(\beta) \qquad \cdots\cdots (**)$$

であるから，平均値の定理より

$$\frac{f(a_n)-f(\beta)}{a_n-\beta}=f'(c_n)$$

$$\iff \frac{a_{n+1}-\beta}{a_n-\beta}=-\frac{1}{c_n^2}$$

となる a_n と β の中間値 c_n が存在する．すると $n\geqq 2$ のとき，$\frac{3}{2}\leqq c_n\leqq 2$ であるから

$$\left|\frac{a_{n+1}-\beta}{a_n-\beta}\right|=\frac{1}{c_n^2}\leqq\frac{4}{9}$$

$$\therefore\ |a_{n+1}-\beta|\leqq\frac{4}{9}|a_n-\beta|$$

である．n が十分大のとき，この不等式を繰り返し用いて

$$(0\leqq)\,|a_n-\beta|\leqq\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}|a_2-\beta|$$

である．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}|a_2-\beta|=0$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-\beta|=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\beta$$

である．

＜別解終＞

このように，(∗∗) の形から，平均値の定理を用いて不等式を作る手法があります．この際

・$a_n=\beta$ となるときは平均値の定理が使えない（分母が 0 になる）

・$\frac{1}{c_n^2}$ を「1 より小さい」定数でおさえないといけない (1 ではダメなので $n=1$ のときは除く）

ということに注意してください．2 つめの c_n を評価するところでは，以下のような誤答を書く人がいます．

＜誤答＞

$$\left|\frac{a_{n+1}-\beta}{a_n-\beta}\right|=\frac{1}{c_n^2}$$

$$\iff |a_{n+1}-\beta|=\frac{1}{c_n^2}|a_n-\beta|$$

となる c_n が存在する．n が十分大のとき，これを繰り返し用いて

$$(0\leqq)\,|a_n-\beta|=\frac{1}{c_{n-1}^2c_{n-2}^2\cdots\cdots c_1^2}|a_1-\beta|$$

である．

$$c_k^2>1\quad(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,n-1)$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_{n-1}^2c_{n-2}^2\cdots\cdots c_1^2}|a_1-\beta|=0$$

であり，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-\beta|=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\beta$$

である．

＜誤答終＞

何が間違いか分かりますか？答えは

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_{n-1}^2}\cdot\frac{1}{c_{n-2}^2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{1}{c_1^2}=0$$

としてしまっているところです．1 より小さい正の数を無限個かけるので 0 にいくのは正しそうですが，c_n が n に依って良いので

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}\neq 0$$

のような反例が作れます．したがって，$\frac{1}{c_n^2}$ を 1 より小さい「定数」でおさえることが大事なのです．

最後に，1 問練習問題をつけておきます．最後に述べた平均値の定理の感覚を磨いてください．

問　k を 2 以上の整数とする．また

$$f(x)=\frac{1}{k}\left((k-1)x+\frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1)　$x>0$ において，関数 $y=f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ．

(2)　数列 $\{x_n\}$ が $x_1>1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を満たすとき，$x_n>1$ を示せ．

(3)　(2) の数列 $\{x_n\}$ に対し

$$x_{n+1}-1<\frac{k-1}{k}(x_n-1)$$

を示せ．また $\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ．

強者の戦略

＜解答＞

(1)　$x>0$ において

$$f'(x)=\frac{1}{k}\left(k-1-(k-1)\frac{1}{x^k}\right)$$
$$=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{x^k-1}{x^k}$$

であり

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

である．よって，$f(x)$ の増減表は下のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(∞)	↘	1	↗	(∞)

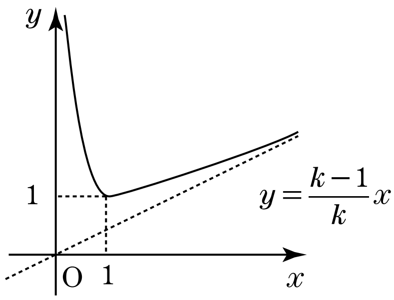
これより，$x=0$ は漸近線であり

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{k-1}{k}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\frac{k-1}{k}x\right)=0$$

であるから，直線 $y=\dfrac{k-1}{k}x$ も漸近線である．

これより，$y=f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる．



(2)　数学的帰納法で示す．

(I)　$n=1$ のとき

$x_1>1$

より成立する．

(II)　$n=l\ (l\geqq 1)$ のとき

$x_l>1$

と仮定する．このとき，(1) より

$$x_{l+1}=f(x_l)>f(1)=1$$

であり，$n=l+1$ のときも成り立つ．

以上，(I)，(II) より示せた．

(3)　(2) より $x_n-1\fallingdotseq 0$ に注意する．$f(x)$ は微分可能であるから，平均値の定理より

$$\frac{x_{n+1}-1}{x_n-1}=\frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}=f'(c_n)$$

$(1<c_n<x_n)$

となる c_n が存在する．$c_n>1$ より

$$f'(c_n)=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{c_n^k-1}{c_n^k}<\frac{k-1}{k}$$

が成り立つので

$$\frac{x_{n+1}-1}{x_n-1}<\frac{k-1}{k}$$

$$\iff\quad x_{n+1}-1<\frac{k-1}{k}(x_n-1)\quad(\because\quad x_n>1)$$

である．

n が十分大のとき，繰り返し用いて

$$0<x_n-1<\left(\frac{k-1}{k}\right)(x_{n-1}-1)$$
$$<\cdots\cdots$$
$$<\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}(x_1-1)$$

が成り立つ．k は 2 以上の整数より

$$0<\frac{k-1}{k}<1$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}(x_1-1)=0$$

である．よって，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-1)=0\iff\lim_{n\to\infty}x_n=1$$

である．

＜解答終＞

この問題も，c_n を定数でおさえることが重要です．

最後に…．

これを書いている今，全国に緊急事態宣言が出され，多くの皆さんが家での勉強を余儀なくされていると思います．私も在宅勤務中にこの原稿を書いています．不便を感じることもありますが，こんな時にどう過ごすかが大切です．今は力を溜める時期と割り切って，日々の勉強に臨んでください．

今回は以上にしたいと思います．また次回をお楽しみに．

＜数学科　川﨑＞