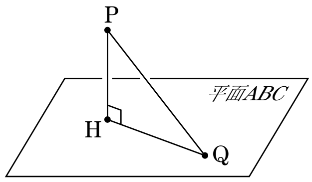
強者の戦略

それでは前回の解答です．まずは図形の位置関係を調べる方針で解いてみます．

> ## 数ⅠAⅡB
> 座標空間内の 3 点 A(4，0，−1)，B(0，1，1)，C(2，−1，−1) に対し，三角形 ABC の周および内部からなる領域を D とする．点 P(1，−2，1) を中心とする球面 S と領域 D が共有点をもつような，球面 S の半径 r の最小値を求めよ．

《解答》

点 P から平面 ABC に下ろした垂線の足を H とする．領域 D 上の任意の点を Q とすると，求めるものは，線分 PQ の長さの最小値である．



$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{PH}^2+\mathrm{HQ}^2$$

が成り立ち，PH は一定で，さらに

$$\mathrm{PQ}\geqq 0,\ \mathrm{HQ}\geqq 0$$

であるから，HQ が最小のとき PQ が最小となる．

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

である．

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\vec{n}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\vec{n}=0$$

より，$\vec{n}$ は平面 ABC の法線ベクトルの 1 つである．

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\parallel\vec{n}$ より，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=k\vec{n}\quad\cdots\cdots①$$

と表すことができる．また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\vec{n}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{n}=0$$
$$\left(\overrightarrow{\mathrm{PH}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right)\cdot\vec{n}=0$$
$$\left(k\vec{n}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right)\cdot\vec{n}=0\quad(\because\ ①)$$
$$\therefore\ k=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|^2}$$

である．① に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|^2}\vec{n}$$

を得る．

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$
$$=3-4-6=-7$$

$$\left|\vec{n}\right|^2=1+4+9$$
$$=14$$

であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=-\frac{1}{2}\vec{n}$$
$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-4\\-3\end{pmatrix}$$

である．ここで

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}+\frac{5}{4}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-4\\-3\end{pmatrix}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

である．よって，点 H は平面 ABC 上において，直線 BC に関して点 A とは反対側に存在する．

点 H から直線 BC に下ろした垂線の足を N とすると実数 l を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{BN}}=l\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{HN}}&=\overrightarrow{\mathrm{BN}}-\overrightarrow{\mathrm{BH}}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\left(l-\frac{5}{4}\right)\overrightarrow{\mathrm{BC}}\end{aligned}$$

と表すことができる．また，$\overrightarrow{\mathrm{HN}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\left(l-\frac{5}{4}\right)\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2=0$$

$$\frac{1}{2}\cdot 14+12\left(l-\frac{5}{4}\right)=0$$

$$\therefore\ l=\frac{2}{3}$$

である．

$$0<l<1$$

より，N は線分 BC 上の点であるので，Q＝N のとき，HQ は最小である．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{HN}}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\frac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=\frac{1}{12}\left\{6\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}-7\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}\right\}\\&=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}10\\8\\2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{HN}}\right|&=\frac{1}{6}\sqrt{25+16+1}\\&=\frac{\sqrt{42}}{6}\end{aligned}$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|&=\frac{1}{2}\sqrt{1+4+9}\\&=\frac{\sqrt{14}}{2}\end{aligned}$$

である．よって

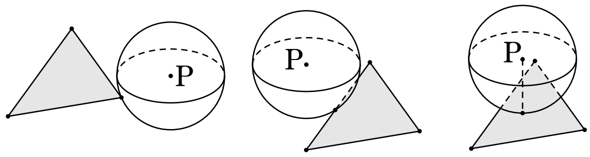
$$\begin{aligned}\mathrm{PN}&=\sqrt{\mathrm{PH}^2+\mathrm{HN}^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{42}}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{14}\\&=\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{14}\\&=\frac{\sqrt{42}}{3}\end{aligned}$$

であり，これが求める r の最小値である．

《解説》

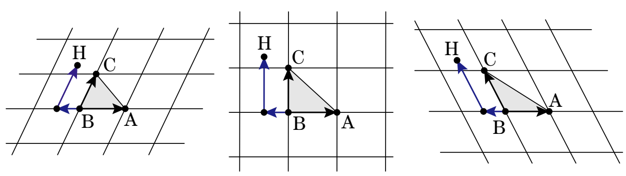
球面と領域 D が共有点をもつ半径が最小となるときは次の 3 つの場合が考えられます．

・球面が三角形 の頂点を通る場合
・球面が三角形の辺において接する場合
・球面が三角形の内部で接する場合



今回は座標軸を描いて図示しても，球と三角形の位置関係を把握するのは困難です．こういったときは**断面や垂線**を用いて，平面の話に持ち込むのが効果的です．《解答》では球面の中心 P から平面 ABC に下ろした垂線の足が三角形 ABC に対してどこにあるかを考えています．

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$



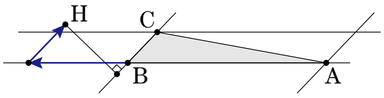
△ABC は様々な形状が考えられますが，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ の係数が負より，上図のようにいずれの場合も点 H

は $\triangle$ABC の外部，より正確には直線 BC に関して，点 A とは反対側にあることが分かります．

よって，線分 BC 上の点で，点 H に最も近い点を求めたいのですが，次図のように極端な場合も考慮すると，点 H に最も近い点は

点 B，点 C，H から BC に下ろした垂線の足

のいずれかです．



《解答》では，点 H から直線 BC に下ろした垂線の足を N とすると実数 l を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{BN}}=l\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

と表すことができることを利用し，l の値を調べることで N の位置を調べています．

N の位置を調べるだけなら，次のような計算も考えられます．

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

より

$\mathrm{B}(0，1，1)$，$\mathrm{C}(2，-1，-1)$，$\mathrm{H}\left(\frac{1}{2}，-1，-\frac{1}{2}\right)$ を

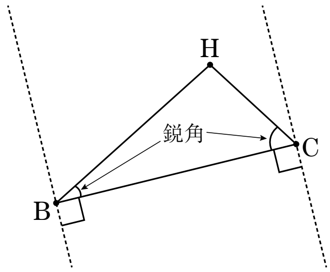
用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}，\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-4\\-3\end{pmatrix}，$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}=1+4+3=8>0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=3+0+1=4>0$$

である．よって，$\angle$CBH と $\angle$BCH はともに鋭角であるから，H から直線 BC に下ろした垂線の足 N は線分 BC 上にあることが分かる．



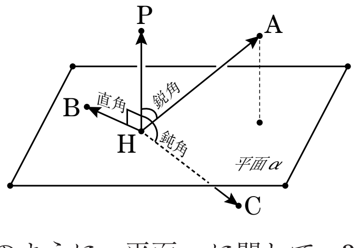
$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

より，内積と 0 との大小で，2 つのベクトルのなす角が鋭角・直角・鈍角のいずれであるかが判断できます．今回はどちらも鋭角より，点 H が上図の 2 本の破線の間にあることは分かります．

本問では，最小値を求めるために l とおいて解くほうが計算量が減ります．

また，同様にして，空間内での点の位置関係を調べることができます．



図のように，平面 α に関して，3 点 A，B，C が点 P と同じ側にあるか，反対側にあるか，あるいは平面上にあるかは，H を始点とするベクトルのなす角を調べることで分かります．

空間における大事な考え方の 1 つですので押さえておきましょう．

さて，ここまでは捉えにくい3次元の様子をいかにして捉えるかというのがテーマでしたが，最後に位置関係を一切気にしない解法もやってみましょう．

《別解》

領域D上の任意の点をQとすると，求めるものは，線分PQの長さの最小値である．

Qは三角形ABCの周または内部上の点より

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{BA}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s+t\leqq 1)$$

と表すことができる．

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\begin{pmatrix}4s+2t\\-s-2t\\-2s-2t\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2&=(4s+2t-1)^2+(-s-2t+3)^2\\&\qquad+(-2s-2t)^2\\&=21s^2+(28t-14)s+12t^2-16t+10\\&=21\left(s-\frac{1-2t}{3}\right)^2+\frac{8}{3}\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{7}{2}\end{aligned}$$

である．これを$f(s)$とおく．

まず，tを$0\leqq t\leqq 1$において固定しsだけ動かしたときの$f(s)$の最小値$g(t)$を求める．

$s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s+t\leqq 1$より

$$0\leqq s\leqq 1-t\ (\leqq 1)$$

である．

(i)　$0\leqq\dfrac{1-2t}{3}\leqq 1-t$　つまり$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$のとき

$s=\dfrac{1-2t}{3}$で$f(s)$は最小値

$$g(t)=\frac{8}{3}\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{7}{2}$$

をとる．

(ii)　$\dfrac{1-2t}{3}\leqq 0$　つまり$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$のとき

$s=0$で$f(s)$は最小値

$$\begin{aligned}g(t)&=12t^2-16t+10\\&=12\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{14}{3}\end{aligned}$$

をとる．

(iii)　$1-t\leqq\dfrac{1-2t}{3}$のとき

$t\geqq 2$となり，不適である．

次にtを動かしたときの$g(t)$の最小値を求める．

(i)のとき，$t=\dfrac{1}{2}$で最小値5，

(ii)のとき，$t=\dfrac{2}{3}$で最小値$\dfrac{14}{3}$

をとる．よって，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$は，$s=0,\ t=\dfrac{2}{3}$で最小値

$$\frac{14}{3}$$

をとる．

以上より，求める半径rの最小値は

$$\sqrt{\frac{14}{3}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

である．

《解説》

点Pが三角形XYZの周および内部に存在するとき，三角形XYZの<u>形状によらず</u>

$$\overrightarrow{\mathrm{XP}}=s\overrightarrow{\mathrm{XY}}+t\overrightarrow{\mathrm{XZ}}$$
$$(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s+t\leqq 1)$$

が成り立つのでした．座標平面上で三角形上の点を表そうとすると，三角形を囲む3直線の方程式を求めて領域で表して……とメンドウな作業が必要になります．

図形の形が不明，もしくは不定のときはベクトルが有効な手段となりますね．

これを用いると，PQ^2を

$$21s^2+(28t-14)s+12t^2-16t+10$$

と独立な2変数$s,\ t$を用いて表すことができます．

強者の戦略

多変数関数の最大・最小で文字を減らすことができない場合に有効なのが，**1文字固定法**です．今回はs，tともに「次数」，「登場回数」が変わらないため，どちらかを固定して2次関数として最小値を考え，固定した文字を動かし，真の最小値を求めます．

さらに

$$s=0\,,\ t=\frac{2}{3}\ \text{のとき，}\ \overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\ \text{となるので}$$

PQが最小となるようなQの居場所も判明します．

いかがだったでしょうか．最初に習う初等幾何に加えて，高校数学でベクトルや三角比などを習い，図形問題に挑むための解法(武器)を手に入れることができます．

難問を解くための武器を数多く揃え，1つ1つを磨き上げていきましょう．

では，今回はここまでにしたいと思います．

(数学科　松浦)