強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第１問（数 IAIIB）

有理数 a，b に対して，$(a+bi)^2$ の実部と虚部が整数ならば，a，b は整数であることを証明せよ．ただし，i は虚数単位である．

<解答>

$$a=\frac{l}{k},\ b=\frac{n}{m}$$

(k，m は自然数，l，n は整数であり

k と l，m と n は互いに素)

とおく．

$$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$$
$$=\frac{l^2}{k^2}-\frac{n^2}{m^2}+\frac{2ln}{km}i$$
$$=\frac{l^2m^2-k^2n^2}{k^2m^2}+\frac{2ln}{km}i$$

である．これらの実部，虚部が整数であることから

$$\frac{l^2m^2-k^2n^2}{k^2m^2}=s,\ \frac{2ln}{km}=t$$

(s，t は整数)

とおける．分母を払って

$$l^2m^2-k^2n^2=sk^2m^2 \quad \cdots\cdots①$$
$$2ln=tkm \quad \cdots\cdots②$$

である．

ここで，$l=0$ のとき

$$① \iff -n^2=sm^2 \quad \cdots\cdots③$$
$$(\because\ k^2>0)$$
$$(② \iff t=0 \quad (\because\ km>0))$$

である．③ より，$-n^2$ は m^2 の倍数であり，n と m は互いに素であるから，$m=1$ である．よって $a=0$，$b=n$ となり，これらは整数である．

また，$n=0$ のときも同様にして a，b が整数であることが示される．

以下，$l\neq 0$，$n\neq 0$ とする．　（※）

① より

$$l^2m^2=k^2(n^2+sm^2)$$

であるから，l^2m^2 は k^2 の倍数である．さらに，k と l が互いに素であることから

$$m^2 \text{ は } k^2 \text{ の倍数} \quad \cdots\cdots④$$

である．さらに，① より

$$k^2n^2=m^2(l^2-sk^2)$$

であり，k^2n^2 は m^2 の倍数である．さらに，m と n が互いに素であることから

$$k^2 \text{ は } m^2 \text{ の倍数} \quad \cdots\cdots⑤$$

である．④，⑤ と k，m がともに自然数であることから

$$k=m$$

が成り立つ．

すると，② より

$$2ln=tk^2$$

であり，左辺は k^2 で割り切れる．k と l，$m(=k)$ と n は互いに素であるから，2 が k^2 で割り切れ，これより $k=1\,(=m)$ である．

以上より，a，b が整数であることが示された．

□

<別解>（※）までは同様．

①，② は分母を払わなければ

$$\frac{l^2}{k^2}-\frac{n^2}{m^2}=s \quad \cdots\cdots⑥$$
$$2\cdot\frac{l}{k}\cdot\frac{n}{m}=t \quad \cdots\cdots⑦$$

である．ここから，m，n を消去する．

$$⑦ \iff \frac{n}{m}=\frac{tk}{2l} \quad (\because\ l\neq 0)$$

であるから，⑥ に代入して

$$\frac{l^2}{k^2}-\frac{t^2k^2}{4l^2}=s \iff 4l^4-t^2k^4=4sk^2l^2$$
$$\iff 4l^4=k^2(t^2k^2+4sl^2)$$
$$\cdots\cdots⑧$$

である．これより，$4l^4$ は k^2 の倍数であり，l と k は互いに素であるから 4 は k^2 の倍数である．これと，k が自然数であることから

$$k=1,\ 2$$

に限られる．

ここで，$k=2$ とすると，⑧ より

$$l^4=4(t^2+sl^2)$$

となるので，l は偶数となるが，これは k と l が互いに素であることに反する．

よって，$k=1$ である．すると，⑦，⑧ より

$$l=\frac{mt}{2n},\ \ 4l^4=t^2+4sl^2$$

である．ここから l を消去して

$$4\cdot\frac{m^4t^4}{16n^4}=t^2+4s\cdot\frac{m^2t^2}{4n^2}$$

$$\iff\ m^4t^2=4n^2+4sm^2n^2$$

$$\iff\ m^2(m^2t^2-4sn^2)=4n^4\ \ \cdots\cdots⑨$$

$(\because\ \ k$ は自然数 $)$

である．よって，$4n^4$ は m^2 の倍数であるが，m と n は互いに素であるから 4 は m^2 の倍数である．これと，m が自然数であることから

$$m=1,\ 2$$

に限られる．

ここで，$m=2$ とすると，⑨ より

$$4(t^2-sn^2)=n^4$$

となるので，n は偶数であるが，これは m と n が互いに素であることに反する．

よって，$m=1$ である．

以上より

$$a=l,\ b=n$$

となり，これらは整数である．

□

＜コメント＞

数学科の川﨑です．今回は整数問題から出題しました．設定は非常にシンプルなのですが，その分どう解いたらいいか戸惑った人も多かったのではないかと思います．

この問題を解く上でのキーポイントは

「約数・倍数」「互いに素」

という，整数問題では頻繁に使う基本事項です．これらの要素を，筋道立てて正しく使えるかの勝負になります．

解法を 2 つ紹介しましたので，それぞれ見ていきましょう．

まず＜解答＞の方からです．a，b が有理数という条件がありますので，分母，分子をそれぞれ置きます．このとき，分母は自然数でとりましょう．分母と分子を互いに素にしておくのも定石です．このもとで，条件である「実部・虚部が整数」を①，② という形で式にしていきます．

文字が多いので，ここからどうもっていくか悩み所です．式としては ② の方がシンプルなのですが，② の左辺にある 2 が曲者で，扱いにくさがあります. そこで①から攻めていくことにします．

約数・倍数の議論をしたいのですが，$l=0$ や $n=0$ のときは割り切れるのが当たり前なので分けておきます．

k と l が互いに素であることに着目して

$$l^2m^2=k^2(n^2+sm^2)$$

と ① を変形すると，m^2 が k^2 で割り切れることが分かります．これより

$$m^2\geqq k^2$$

です．

さらに ① を

$$k^2n^2=m^2(l^2-sk^2)$$

と変形すると，逆に k^2 が m^2 で割り切れることも分かり

$$k^2\geqq m^2$$

となります，以上より

$$k=m$$

が示せます．

この $k=m$ であるという事実は，実験して予想しておくと良いと思います．例えば

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right)^2$$

とかでは，展開したとき実部が整数にならないのは明らかですね．

$k=m$ を示した後は，使っていない ② の出番です．

$$2ln=tk^2$$

となるので，右辺が k^2 の倍数であることから，

$2ln$ が k^2 の倍数となります．ところが，ln は k^2 と互いに素なので，2 が k^2 の倍数となり，ここから $k=1\,(=m)$ が示せます．

＜別解＞に関しては，⑦ を使って文字を減らす方針です．⑧ の式から $4l^4$ が k^2 の倍数になり．k と l が互いに素であることから，4 が k^2 の倍数と分かります．これより $k=1$ または 2 です．示すことは $k=1$ なので，$k=2$ として矛盾を導けば OK です．実際，$k=2$ とすると，⑧ から l も偶数となるので k と l が互いに素に反します．全く同様の議論を m，n についてすることで，$m=1$ も示せます．

このように，「互いに素」と設定して，約数・倍数の形を作り議論していくのは整数問題では必須の手法ですので，この問題を通じて是非慣れてもらえたらなと思います．

最後にもう 1 問練習問題をつけておきます．こちらにも挑戦してみてください．

問

以下の命題の真偽を述べよ．命題が真であれば証明を与えよ．また，命題が偽であれば反例を与えよ．

(1)　実数 a，b に対して，$a+b$，ab がともに整数であれば，a，b は整数である．

(2)　有理数 a，b に対して，$a+b$，ab がともに整数であれば，a，b は整数である．

＜解答＞

(1)　偽である．反例として

$$a=\sqrt{2},\ b=-\sqrt{2}$$

などがある．

(2)　真である．以下，それを示す．

a，b は有理数であるから

$$a=\frac{q}{p},\ b=\frac{s}{r}$$

(p，r は自然数，q，s は整数

p と q，r と s は互いに素)

とおける．

仮定より

$$a+b=\frac{qr+ps}{pr}\ \cdots\cdots(*)$$

$$ab=\frac{qs}{pr}\ \cdots\cdots(**)$$

はいずれも整数である．

$(**)$ が整数であることと，p と q，r と s が互いに素であることから

$$q=rk,\ s=pl$$

となる整数 k，l がとれる．これと $(*)$ より

$$\frac{r^2k+p^2l}{pr}=m$$

となる整数 m がとれる．

$$r^2k+p^2l=prm\ \cdots\cdots(***)$$

$$\Longleftrightarrow\ p(rm-pl)=r^2k$$

であるから，r^2k は p の倍数である．さらに，p と $q\,(=rk)$ は互いに素であるから

$$p=1$$

である．

同様に $(***)$ を変形して

$$r(pm-rk)=p^2l$$

であるから，p^2l は r の倍数である．さらに，r と $s\,(=pl)$ は互いに素であるから

$$r=1$$

である．

よって

$$a=q,\ b=s$$

となるので，a，b は整数である．

＜解答終＞

いかがでしたか？この問題も「互いに素」からどう議論していくかが大事です．

それでは今回はここまでにしたいと思います．また次回．

（数学科　川﨑）