強者の戦略

今回の問題は東京工業大学の過去問を抽象化したものでした.

それでは，まず問題の確認です.

> 問題
>
> 2つの異なる素数 p , q ($p<q$) に対して, $(pq)^n!$ に含まれる素因数 q の個数を $f(n)$ とするとき
>
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{(pq)^n}$$
>
> の値を求めよ .

$f(n)$ を求めないと始まりませんが，抽象的過ぎて分からないという場合は，具体的な数値で実験してみるとよいでしょう .

$p=2$，$q=5$，$n=3$ として実験してみると，$f(n)$ は 1000! に含まれる素因数 5 の個数を表します.（末尾に並ぶ 0 の個数とも言えます.）

$5^4=625<1000<5^5=3125$ より，ガウス記号を用いて表すと

$$\begin{aligned}f(n)&=\left[\frac{1000}{5}\right]+\left[\frac{1000}{5^2}\right]+\left[\frac{1000}{5^3}\right]+\left[\frac{1000}{5^4}\right]\\&=200+40+8+1\\&=249\end{aligned}$$

となります.

では，抽象化してみましょう.

$5^4<1000<5^5$ に当たる部分ですが ,

$q^N\leqq(pq)^n<q^{N+1}$ ……①

となる自然数 N を考えます.

すると，実験と同様に考えて

$$f(n)=\left[\frac{(pq)^n}{q}\right]+\left[\frac{(pq)^n}{q^2}\right]+\cdots+\left[\frac{(pq)^n}{q^N}\right]$$

となります.

これを Σ 記号を用いて表すと,

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(pq)^n}{q^k}\right]$$

となります.

ガウス記号の定義より，すべての実数 x に対して

$$[x]\leqq x<[x]+1 \iff x-1<[x]\leqq x$$

が成り立つので

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(pq)^n}{q^k}-1\right\}<f(n)\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{(pq)^n}{q^k}$$

が成り立ちます.

よって

$$(pq)^n\cdot\frac{1}{q}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^N}{1-\frac{1}{q}}-N<f(n)\leqq(pq)^n\cdot\frac{1}{q}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^N}{1-\frac{1}{q}}$$

となり

$$\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^N}{q-1}-\frac{N}{(pq)^n}<\frac{f(n)}{(pq)^n}\leqq\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^N}{q-1}\text{……②}$$

が成り立ちます.

さて，ここから極限を求めるのですが，説明しなければならないことが2つあります.

1つ目は，n と N の関係です．そして2つ目は，② の左辺の後半部分（マイナスの後）の極限です.

1つ目について

① の辺々はすべて正ですので，底を q とする対数をとってよく

$$N\leqq n(\log_q p+1)<N+1$$

が成り立ちます.

$$0<\log_q p<\log_q q=1$$

より

$$1<\log_q p+1<2$$

となり，$N<2n$ かつ $n<N+1$ となるので

$$n\to\infty \iff N\to\infty$$

となります.

2つ目について

$pq-1=x$ とおくと，p，q は異なる2つの素数ですので $x>1$ となり，二項定理を用いて

$$(pq)^n=(1+x)^n>(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k$$

が成り立ち，n が十分大きいとき

$$(pq)^n>{}_n\mathrm{C}_2=\frac{n(n-1)}{2}$$

が成り立ちます．よって

$$0<\frac{N}{(pq)^n}<\frac{2n}{\dfrac{n(n-1)}{2}}=\frac{4}{n-1}$$

であり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n-1}=0$$

ですから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N}{(pq)^n}=0$$

です．

また

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\dfrac{1}{q}\right)^N}{q-1}=\lim_{N\to\infty}\frac{1-\left(\dfrac{1}{q}\right)^N}{q-1}=\frac{1}{q-1}$$

ですので②において

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1-\left(\dfrac{1}{q}\right)^N}{q-1}-\frac{N}{(pq)^n}\right\}=\frac{1}{q-1}-0=\frac{1}{q-1}$$

かつ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\dfrac{1}{q}\right)^N}{q-1}=\frac{1}{q-1}$$

です．ゆえに，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{(pq)^n}=\frac{1}{q-1}$$

と分かります．

数学Ⅲの極限の問題で頻出のテーマ：ガウス記号からのはさみうちの原理を扱った問題でした．しっかりと復習して下さい．

研伸館　数学科　高木　克夫