強者の戦略

それでは前回の解答です.

問題（数Ⅲ）

xyz 空間内の立体 A: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}} \leqq 1$ について考える.

(1) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx$$
$(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots)$

を示せ.

(2) xy 平面上の曲線 C: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

(3) 立体 A の体積を求めよ.

《解答》

(1)
$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x\,dx\\
&=\Big[\sin^{n-1} x(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&\quad+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2} x\cdot\cos^2 x\,dx\\
&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx\\
&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2} x dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx
\end{aligned}$$

であるから

$$n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2} x\,dx$$

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2} x\,dx$$

が成り立つ.

(2) 曲線 C で囲まれた部分の面積を S とする. C は x 軸, y 軸, 原点に関して対称より, $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ の範囲で考える.

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ において, $y\geqq 0$ を解くと

$$a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\geqq 0$$
$$x^{\frac{2}{3}}\leqq a^{\frac{2}{3}}$$

であり, $x\geqq 0$ と合わせて

$$0\leqq x\leqq a$$

である. よって, 求める面積を S とすると

$$S=4\int_0^a y\,dx$$

である.

ここで, C は媒介変数 θ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いて

$$x=a\cos^3\theta,\ y=a\sin^3\theta$$

と表すことができる.

$x=a\cos^3\theta$, $y=a\sin^3\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=-3a\cos^2\theta\ \sin\theta$$

x	0	$\to$	a
θ	$\frac{\pi}{2}$	$\to$	0

である. よって

$$\begin{aligned}
S&=4\int_0^a 4y\,dx\\
&=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3\theta(-3a\cos^2\theta\sin\theta)d\theta\\
&=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)d\theta\\
&=12a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\,d\theta\right)
\end{aligned}$$

である.

(1) の結果を用いて

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta&=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta\\
&=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta\\
&=\frac{3}{8}\Big[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{3}{16}\pi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^6\theta\,d\theta&=\frac{5}{6}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4\theta\,d\theta\\
&=\frac{5}{32}\pi
\end{aligned}$$

である.

以上より

$$S=12a^2\left(\frac{3}{16}\pi-\frac{5}{32}\pi\right)$$
$$=\frac{3}{8}\pi a^2$$

である．

(3)　立体 A は xy 平面に関して対称より，$z \geqq 0$ で考える．

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} \leqq 1-z^{\frac{2}{3}}$$

において左辺が 0 以上より

$$1-z^{\frac{2}{3}} \geqq 0 \qquad \therefore\ 0 \leqq z \leqq 1$$

である．

立体 A を平面 $z=t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ で切ったときの断面は

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+t^{\frac{2}{3}} \leqq 1$$
$$\therefore\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} \leqq 1-t^{\frac{2}{3}}$$

である．(2) の結果は $a=0$ でも成り立ち

$1-t^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ とおくと

$$a^2=\left(1-t^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

より，断面積 $S(t)$ は

$$S(t)=\frac{3}{8}\pi\left(1-t^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

である．

ゆえに，立体 A の体積は

$$2\int_0^1 S(t)dt$$
$$=2\int_0^1 \frac{3}{8}\pi\left(1-t^{\frac{2}{3}}\right)^3 dt$$
$$=\frac{3}{4}\pi\int_0^1\left(1-3t^{\frac{2}{3}}+3t^{\frac{4}{3}}-t^2\right)dt$$
$$=\frac{3}{4}\pi\left[t-\frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}t^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$
$$=\frac{4}{35}\pi$$

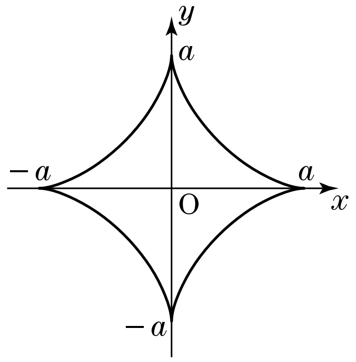
である．　《解答終》

どうだったでしょうか．丁寧に誘導がついているので，最後までたどり着きたいですね．

(1) はいわゆる積分漸化式です．部分積分法を利用して作ります．

今回の $\sin^n x$ 以外にも，$\cos^n x$，$x^n e^x$，$(\log x)^n$ でも同様にして漸化式が作ることができます．怪しい人は確認しておきましょう．

(2) の曲線 C は次図のアステロイド (星芒形) です．

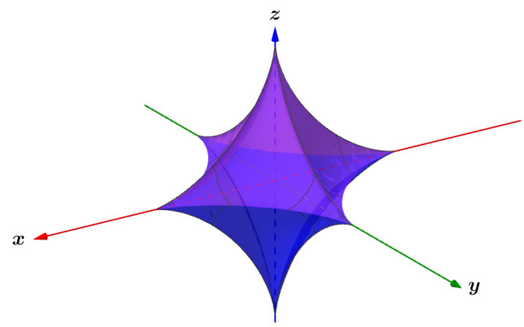


曲線で囲まれた部分の面積を求めるだけですので，曲線の概形まで調べる必要はありません．

対称性を用い，x 軸との関係を調べて，面積を定積分で立式しましょう．

定積分の計算は (1) を用いて頑張りましょう．

(3) で体積を求める立体 A はアステロイドの概形を知っていれば想像できるかもしれませんが，次図のようになります．



問題を解く上ではもちろん図示する必要はなく，軸に垂直な断面で切ったときの断面積を求めます．

強者の戦略

(2) の結果を上手く流用するために，$1-t^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ とおいて，曲線 C の方程式の形を再現しましょう．

あとは計算ミスに気をつけて最後まで駆け抜けるだけですね．

(2) の曲線，(3) の立体，ともに図示する必要はないですが，頭の中である程度のイメージがないと難しかったのではないかと思います．

頻出の曲線の概形はおさえた上で，立体を考える経験を積んでおきましょう．

また (1) で求めた式ですが

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx \\
&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n t\cdot(-1)\,dt \ \left(\frac{\pi}{2}-x=t\text{と置換}\right) \\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt \\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx
\end{aligned}
$$

より，$\sin x$ を $\cos x$ に変えても同じ漸化式が得られます．さらに $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とおき，$0^0=1$ と定義した上で (1) を拡張すれば

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n=2，3，4，\cdots\cdots)$$

が成り立ちます．これを繰り返し用いることで

$$
I_n=\begin{cases}
\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{2}{3} & (n:\text{奇数}) \\
\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n:\text{偶数})
\end{cases}
$$

という有名な結果が手に入ります．丸暗記する必要はないですが，今回のように誘導されればたどり着けるようにしておきましょう．

研伸館　数学科　松浦　秀幸