それでは，前回の解答です．

第１問（数 IAIIB）

p を 2 以上の自然数とし，数列 $\{x_n\}$ は

$$x_1=\frac{1}{2^p+1}$$

$$x_{n+1}=|2x_n-1|\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

をみたすとする．以下の問に答えよ．

(1)　$p=3$ のとき，x_n を求めよ．

(2)　$x_{p+1}=x_1$ であることを示せ．

＜解答＞

(1)　$p=3$ のとき

$$x_1=\frac{1}{2^3+1}=\frac{1}{9}$$

$$x_2=\left|2\cdot\frac{1}{9}-1\right|=\frac{7}{9}$$

$$x_3=\left|2\cdot\frac{7}{9}-1\right|=\frac{5}{9}$$

$$x_4=\left|2\cdot\frac{5}{9}-1\right|=\frac{1}{9}$$

である．$x_4=x_1$ であり，数列 $\{x_n\}$ の定め方からこの数列は

$$\frac{1}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{5}{9}$$

を繰り返す周期 3 の数列である．よって

n が 3 で割って 1 余るとき，$x_n=\dfrac{1}{9}$

n が 3 で割って 2 余るとき，$x_n=\dfrac{7}{9}$

n が 3 で割り切れるとき，$x_n=\dfrac{5}{9}$

である．

(2)　$2\leqq n\leqq p+1$ に対して

$$x_n=\frac{2^p-2^{n-1}+1}{2^p+1}$$

が成り立つことを，n についての数学的帰納法で示す．

(I)　$n=2$ のとき

$$\begin{aligned}x_2&=\left|\frac{2}{2^p+1}-1\right|\\&=\frac{|2^p-1|}{2^p+1}\\&=\frac{2^p-1}{2^p+1}\quad(\because\ p\geqq 2)\\&=\frac{2^p-2^{2-1}+1}{2^p+1}\end{aligned}$$

であるから成立する．

(II)　$n=k\,(2\leqq k\leqq p)$ のとき

$$x_k=\frac{2^p-2^{k-1}+1}{2^p+1}$$

と仮定する．このとき

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=|2x_k-1|\\&=\left|\frac{2(2^p-2^{k-1}+1)}{2^p+1}-1\right|\\&=\frac{|2\cdot 2^p-2^k+2-(2^p+1)|}{2^p+1}\\&=\frac{|2^p-2^k+1|}{2^p+1}\\&=\frac{2^p-2^{(k+1)-1}+1}{2^p+1}\quad(\because\ 2\leqq k\leqq p)\end{aligned}$$

であるから，$n=k+1$ のときも成立する．

以上 (I)，(II) より

$$x_n=\frac{2^p-2^{n-1}+1}{2^p+1}\quad(2\leqq n\leqq p+1)$$

であることが示された．

これより

$$\begin{aligned}x_{p+1}&=\frac{2^p-2^p+1}{2^p+1}\\&=\frac{1}{2^p+1}\\&=x_1\end{aligned}$$

である．

□

＜コメント＞

数学科の川﨑です．新年明けましておめでとうございます．今年もこのページをよろしくお願いします．

さて，今回は2020年に神戸大学 (理系) で出題された問題を出題しました．設定はシンプルな問題ですが，(2) で苦戦した受験生が (医学部受験生でも) 多く，差がつく問題だったと思います．

以下，設問ごとに補足を述べます．

(1)　$p=3$ なので，$x_1=\dfrac{1}{9}$ です．漸化式が

$$x_{n+1}=2x_n-1$$

であれば，特性方程式を立てて解くところですが，右辺が $|2x_n-1|$ と絶対値のついた形になっているのでそう簡単にはいきません．というわけで実験してみましょう．

$$x_2,\ x_3,\ x_4\ ,\ \cdots\cdots$$

と求めてみると，$x_4=x_1$ となることが分かります (これは (2) の問題文から成り立つはずですね)．

与えられている漸化式が 2 項間漸化式なので，$\{x_n\}$ の項の中に同じ値の項が出てきたら，以後この数列は周期的になります．実際計算すると

$$x_5=x_2,\ x_6=x_3,\ x_7=x_4,\ \cdots\cdots$$

となることが確認できます．周期 3 ですので，n を 3 で割った余りで分けて，一般項を答えてください．

(2)　(1) の一般化です．数列 $\{x_n\}$ が周期 p をもつことを示します．いきなり x_{p+1} を求めることは無理なのですが，ここで手が止まる人が多いようです．(1) と同様，実験して手を動かしていかなくてはいけません．この問題が,「一般項 x_n を求めよ．」と聞かれた方が実験する人は増えると思います．何をするのか，そこで思考力が問われています．

さて，実験するとどうなるかを見てみましょう．$p\geqq 2$ に注意して

$$x_2=\left|\frac{2}{2^p+1}-1\right|=\frac{2^p-1}{2^p+1}$$

$$x_3=\left|\frac{2(2^p-1)}{2^p+1}-1\right|=\frac{2^p-3}{2^p+1}$$

$$x_4=\left|\frac{2(2^p-3)}{2^p+1}-1\right|=\frac{|2^p-7|}{2^p+1}$$

となります．これで $p=2$，3 のときは成り立つことが分かります．

$p\geqq 4$ とすると

$$x_4=\frac{2^p-7}{2^p+1}$$

$$x_5=\left|\frac{2(2^p-7)}{2^p+1}-1\right|=\frac{|2^p-15|}{2^p+1}$$

となり，$p=4$ での成立も言えます．

このように見ていくと

・x_n の分母は常に 2^p+1

・x_n の分子の絶対値の中身は 2^p-●の形 (ただし，$n\geqq 2$)

・●が徐々に大きくなって，最終的に x_{p+1} の分子が 1 になる

などが分かると思います．これらのことは厳密には帰納法で示せますが，答案中に書く必要はありません．今やりたいのは，一般項を予想することです．●を決めていきましょう．

$$x_n=\frac{2^p-a_n}{2^p+1}$$

とおくと

$$x_{n+1}=\left|\frac{2(2^p-a_n)}{2^p+1}-1\right|$$
$$=\frac{|2^p-(2a_n+1)|}{2^p+1}$$

なので

$$a_{n+1}=2a_n+1\quad(n\geqq 2)$$
$$a_2=1$$

を解いていくことになります (絶対値の議論は後回しにしましょう)．これは，特性方程式型なので

$$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$$

として

$$a_n+1=(a_2+1)\cdot 2^{n-2}$$
$$a_n=2^{n-1}-1$$

と分かります．よって

$$x_n=\frac{2^p-2^{n-1}+1}{2^p+1}\quad (n\geqq 2)$$

と予想できるわけです．

この分子は単調に減少し，$n\leqq p+1$ で正の値をとります．したがって，$2\leqq n\leqq p+1$ の範囲では分子の絶対値が帰納的に正で外れるので，x_n が上記の形で表せることが分かります．

以上を計算用紙で処理し，解答は予想が正しいことを帰納法で証明していきましょう．

「漸化式　解けない時は　帰納法」

です．$2\leqq n\leqq p+1$ と，n の範囲が限定的であること (特に，$n=1$ を除いておかないといけないのが難しい)，分子の絶対値の処理に気を付けて証明してください．不要なことを書いたり，証明しないといけないことを自明としたりするなどのミスをしないよう答案の書き方にも気を付けましょう．

さて，少し視点を変えて，この問題を考えてみましょう．

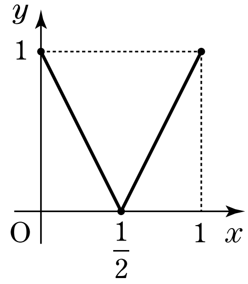
漸化式から

$$f(x)=|2x-1|$$

という関数を考えます．定義域は $0\leqq x\leqq 1$ としましょう．絶対値を外すと

$$f(x)=\begin{cases}1-2x & \left(0\leqq x\leqq \dfrac{1}{2}\right)\\ 2x-1 & \left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1\right)\end{cases}$$

となり，関数 $y=f(x)$ のグラフは次図のような折れ線になります．



この $f(x)$ に x_1 を代入すると x_2 が得られます．

次に，$f(x)$ と $f(x)$ の合成，すなわち

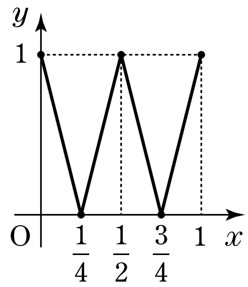
$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=f(f(x))\\&=\big|2|2x-1|-1\big|\end{aligned}$$

を考えます．絶対値を外すと

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases}|2(1-2x)-1| & \left(0\leqq x\leqq \dfrac{1}{2}\right)\\ |2(2x-1)-1| & \left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1\right)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-4x & \left(0\leqq x\leqq \dfrac{1}{4}\right)\\ 4x-1 & \left(\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq \dfrac{1}{2}\right)\\ 3-4x & \left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq \dfrac{3}{4}\right)\\ 4x-3 & \left(\dfrac{3}{4}\leqq x\leqq 1\right)\end{cases}$$

となり，$y=(f\circ f)(x)$ のグラフは次図のようになります．



折れ線の本数が増えましたね．この $(f\circ f)(x)$ に x_1 を代入すると x_3 が得られます．

これを繰り返していきましょう．

$$f^p(x)=(f\circ f\circ\cdots\cdots\circ f)(x)\quad (f \text{ が } p \text{ 個 })$$

に x_1 を代入したものが x_{p+1} です．グラフは，絶対

値を外す際に切れ目になる値に着目して

$$x=\frac{2k-1}{2^p}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2^{p-1})\text{ のとき，}$$

$y=0$ の点

$$x=\frac{2k}{2^p}\quad (k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 2^{p-1})\text{ のとき，}$$

$y=1$ の点

を結ぶ折れ線になります．特に $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2^p}$ のとき

$$f^p(x)=1-2^p x$$

となり，$0 \leqq x_1 \leqq \dfrac{1}{2^p}$ なので

$$\begin{aligned} x_{p+1} &= f^p(x_1) \\ &= 1-\frac{2^p}{2^p+1} \\ &= \frac{1}{2^p+1} \\ &= x_1 \end{aligned}$$

となります．つまり，x_1 の値は

$y=1-2^p x$ と $y=x$

のグラフの交点の x 座標として与えられているわけです．

この絶対値のグラフ (折れ線) を合成で増やしていく問題は入試でもよく見かけます (共通テストでも出し方を工夫すれば出題されるかも？)．

最後にこれがテーマの問題を 1 問つけておきますので，こちらにも挑戦してみてください．

問

関数 $f(x)=-|2x-1|+1\ \ (0 \leqq x \leqq 1)$ を用いて関数 $g(x)=-|2f(x)-1|+1\ \ (0 \leqq x \leqq 1)$ を考える．$0<c<1$ のとき，$g(x)=c$ を満たす x を求めよ．

＜解答＞

$y=g(x)$ のグラフを考える．絶対値を外すと，x の 1 次式となるので，このグラフは折れ線である．

絶対値を外す際の切れ目は

$|2x-1|$ が $x=\dfrac{1}{2}$

$|2(2x-1)-1|=|4x-3|$ が $x=\dfrac{3}{4}$

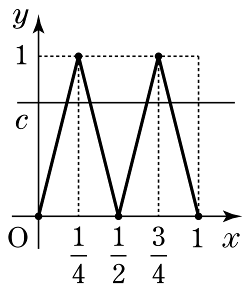
$|2(1-2x)-1|=|1-4x|$ が $x=\dfrac{1}{4}$

である．

$$g\left(\frac{1}{4}\right)=g\left(\frac{3}{4}\right)=1$$

$$g(0)=g\left(\frac{1}{2}\right)=g(1)=0$$

であるから，$y=g(x)$ のグラフは次図のようになる．



これと直線 $y=c\ (0<c<1)$ との共有点の x 座標を求めて

$$x=\frac{c}{4},\ \frac{2-c}{4},\ \frac{2+c}{4},\ \frac{4-c}{4}$$

である．

＜解答終＞

それでは今回はここまでにしたいと思います．

今年度私からの出題は今回が最後です．受験生の方は，こんなご時世での受験本当に大変だと思います．実力が発揮出来ることを願っています．

（数学科　川﨑）