強者の戦略

強者サイトをご覧になっている皆さん，こんにちは．数学科の中西です．寒さが増す今日この頃ですが，皆さんいかがお過ごしでしょうか．

さて，先日初めての大学入学共通テストが行われました．数学については，試行調査の問題と比べると計算の難しさ・煩雑さはかなり和らぎましたが，当初の予定通り，問題文に書かれたことを活用し，教科書に載っていない内容でもその場で対応して，正答を導く能力を要求する問題が出題されていました．

このタイプの問題は，二次試験であれば，主に医学部の入試問題などで以前から出題されていました．今回は，そんな過去問の中から１題，出題します．

問題

自然数 m，n に対し，m と n の最大公約数を $\gcd(m,\ n)$ で表す．以下はユークリッドの互除法を用いた最大公約数の求め方である．

ユークリッドの互除法

m，n を $m>n$ をみたす自然数とし，$r_1=m$，$r_2=n$ とおく．r_1 を r_2 で割った商を q_2，余りを r_3 $(0\leqq r_3<r_2)$ とする．もし $r_3\neq 0$ ならば r_2 を r_3 で割った商を q_3，余りを r_4 $(0\leqq r_4<r_3)$ とする．この手順を $k-1$ 回繰り返したとき，余り r_{k+1} が 0 になれば，次の関係式が成り立つ．

$$r_1=m$$
$$r_2=n$$
$$r_1=r_2q_2+r_3 \quad (0<r_3<r_2)$$
$$r_2=r_3q_3+r_4 \quad (0<r_4<r_3)$$
$$\cdots\cdots$$
$$r_{k-2}=r_{k-1}q_{k-1}+r_k \quad (0<r_k<r_{k-1})$$
$$r_{k-1}=r_kq_k$$

このとき，m と n の最大公約数について，

$$\gcd(m,\ n)=\gcd(r_1,\ r_2)=\gcd(r_2,\ r_3)=\cdots\cdots=\gcd(r_{k-1},\ r_k)=r_k$$

が成り立つ．

自然数 n に対し，すべての位の数字が 1 である n 桁の自然数を a_n とおく．例えば，$a_1=1$，$a_2=11$，$a_3=111$ であり，すべての n に対して

$$a_n=1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}10^k$$

である．次の問いに答えよ．

(1)　$m>n$ をみたす自然数 m と n に対し，等式 $a_m-a_n=10^n a_{m-n}$ が成り立つことを示せ．

(2)　(1) の結果を用いて，$m>n$ をみたす自然数 m と n に対し，$\gcd(a_m,\ a_n)=\gcd(a_n,\ a_{m-n})$ が成り立つことを示せ．

(3)　$m>n$ をみたす自然数 m と n の最大公約数を d とすると，a_m と a_n の最大公約数は a_d であることを示せ．ただし，必要であれば，枠で囲まれたユークリッドの互除法の説明文で使用されている記号を用いてもよい．

(4)　a_{12345} と a_{54321} の最大公約数を求めよ．

特に (3) において，枠内の説明文をいかに活用するかについて，考えてみてください．

それでは，解答編でお待ちしています．