強者の戦略

今回は2020年度入試の島根大学／医学部・総合理工学部／前期日程の過去問を，少しだけ誘導を削って出題しました．以下,問題を確認してみましょう．

> 問題
>
> 自然数 m，n に対し，m と n の最大公約数を $\gcd(m,\ n)$ で表す．以下はユークリッドの互除法を用いた最大公約数の求め方である．
>
> > ユークリッドの互除法
> >
> > m，n を $m>n$ をみたす自然数とし，$r_1=m$，$r_2=n$ とおく．r_1 を r_2 で割った商を q_2，余りを r_3 $(0\leqq r_3<r_2)$ とする．もし $r_3\neq 0$ ならば r_2 を r_3 で割った商を q_3，余りを r_4 $(0\leqq r_4<r_3)$ とする．この手順を $k-1$ 回繰り返したとき，余り r_{k+1} が 0 になれば，次の関係式が成り立つ．
> >
> > $$\begin{aligned}&r_1=m\\&r_2=n\\&r_1=r_2q_2+r_3 \quad (0<r_3<r_2)\\&r_2=r_3q_3+r_4 \quad (0<r_4<r_3)\\&\cdots\cdots\\&r_{k-2}=r_{k-1}q_{k-1}+r_k \quad (0<r_k<r_{k-1})\\&r_{k-1}=r_kq_k\end{aligned}$$
> >
> > このとき，m と n の最大公約数について，
> >
> > $$\gcd(m,\ n)=\gcd(r_1,\ r_2)=\gcd(r_2,\ r_3)=\cdots$$
> > $$\cdots\cdots=\gcd(r_{k-1},\ r_k)=r_k$$
> >
> > が成り立つ．
>
> 自然数 n に対し，すべての位の数字が 1 である n 桁の自然数を a_n とおく．例えば，$a_1=1$，$a_2=11$，$a_3=111$ であり，すべての n に対して
>
> $$a_n=1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}10^k$$
>
> である．次の問いに答えよ．
>
> (1)　$m>n$ をみたす自然数 m と n に対し，等式 $a_m-a_n=10^na_{m-n}$ が成り立つことを示せ．
>
> (2)　(1) の結果を用いて，$m>n$ をみたす自然数 m と n に対し，$\gcd(a_m,\ a_n)=\gcd(a_n,\ a_{m-n})$ が成り立つことを示せ．
>
> (3)　$m>n$ をみたす自然数 m と n の最大公約数を d とすると，a_m と a_n の最大公約数は a_d であることを示せ．ただし，必要であれば，枠で囲まれたユークリッドの互除法の説明文で使用されている記号を用いてもよい．
>
> (4)　a_{12345} と a_{54321} の最大公約数を求めよ．

まずは，(1) と (2) の解答について考察します．

［解答］

(1)　m，n は $m>n$ を満たす自然数であるから．

$m-n\geqq 1$ であり

$$\begin{aligned}a_m-a_n&=\sum_{k=0}^{m-1}10^k-\sum_{k=0}^{n-1}10^k\\&=\sum_{k=n}^{m-1}10^k\\&=10^n\sum_{k=0}^{m-n-1}10^k\end{aligned}$$

$\therefore$　$a_m-a_n=10^na_{m-n}$　……①

（証明終）

《解説》

a_m は 1 が m 桁，a_n は 1 が n 桁並ぶので，差をとると

$$\begin{array}{r}111\cdots\cdots1111\cdots\cdots1111\\ -\qquad 11\cdots\cdots1111\\ \hline 111\cdots\cdots1100\cdots\cdots0000\end{array}$$

となり，1 が $m-n$ 桁並んだ後に 0 が n 桁並ぶ数になります．後ろに並ぶ n 桁分の 0 を 10 のべき乗の積で表せば

$a_{m-n}\cdot 10^n$

となります．以上の内容を，数式で表現すればよいでしょう．

［解答］

(2)　$\gcd(a_m,\ a_n)=G_1$

$\gcd(a_n,\ a_{m-n})=G_2$

とおく．a_m，a_n，a_{m-n} は 1 の位が偶数でも 5 でもなく，$10\,(=2\cdot 5)$ と互いに素であるから

G_1，G_2 はいずれも 10 と互いに素　……②

である．

まず，G_1 は a_m と a_n の公約数である．よって (1) の ① の左辺の $a_m - a_n$ は G_1 を約数にもつから，① の右辺の $10^n a_{m-n}$ も G_1 を約数にもつ．② より，a_{m-n} が G_1 を約数にもつ．以上より，G_1 は a_n と a_{m-n} の公約数であるから，G_2 の最大性より

$$G_1 \leqq G_2 \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．

次に，G_2 は a_n と a_{m-n} の公約数である．さらに (1) の ① より

$$a_m = a_n + 10^n a_{m-n} \quad \cdots\cdots ④$$

である．④ の右辺の $a_n + 10^n a_{m-n}$ は G_2 を約数にもつから，④ の左辺の a_m も G_2 を約数にもつ．以上より，G_2 は a_m と a_n の公約数であるから，G_1 の最大性より

$$G_2 \leqq G_1 \quad \cdots\cdots ⑤$$

が成り立つ．

よって，③，⑤ より

$$G_1 = G_2$$

すなわち

$$\gcd(a_m,\ a_n) = \gcd(a_n,\ a_{m-n}) \quad \cdots\cdots ⑥$$

が成り立つことが示された．

（証明終）

《解説》

今回の解答と同様にして，ユークリッドの互除法も証明できますが，今回の証明の中では a_n と a_{m-n} の大小関係は用いていません．よって，ユークリッドの互除法の

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3 \quad \cdots\cdots (*)$$

において，r_2 と r_3 の大小関係によらず

$$\gcd(r_1,\ r_2) = \gcd(r_2,\ r_3) \quad \cdots\cdots (**)$$

が証明できます．

ユークリッドの互除法を用いる際は，扱う自然数を小さくしていきたいので，r_3 がなるべく小さくなるように「r_1 を r_2 で割った余り」として設定するのが普通ですが，実際には，(*) の形さえ作れれば，(**) は用いることができます．この考え方を利用した問題が，2016 年度／神戸大学／理系／前期日程の 4 番でも出題されています．

続いて，(3) が証明できれば (4) は簡単なので，まず (4) の解答を紹介します．

［解答］（(3) は証明できたものとして）

(4)

$$54321 = 12345 \cdot 4 + 4941$$
$$12345 = 4941 \cdot 2 + 2463$$
$$4941 = 2463 \cdot 2 + 15$$
$$2463 = 15 \cdot 164 + 3$$
$$15 = 3 \cdot 5$$

であるから，ユークリッドの互除法より

$$\gcd(54321,\ 12345) = 3$$

である．よって，(3) より

$$\gcd(a_{54321},\ a_{12345}) = a_3 = 111$$

である．

《解説》

さて，メインである (3) に取り掛かりましょう．証明したい命題は，$m > n$ を満たす自然数 m，n に対し

「$\gcd(m,\ n) = d \Rightarrow \gcd(a_m,\ a_n) = a_d$」

です．また，手前の小問が誘導になっている可能性が高いので

$$\gcd(a_m,\ a_n) = \gcd(a_n,\ a_{m-n}) \quad \cdots\cdots ⑥$$

の生かし方を考えてみましょう．⑥ が表しているのは $\gcd(a_m,\ a_n)$ を考える際，桁数が多い方から桁数が少ない方の桁数の分だけ 1 を削って考えても最大公約数が一致する，ということです．具体的に考えると，例えば

$a_{28} = 1111\cdots\cdots1111111111$（1 が 28 桁）

$a_{12} = 111111111111$（1 が 12 桁）

の最大公約数は，28 桁から 12 桁削って

$a_{16} = 1111111111111111$（1 が 16 桁）

$a_{12} = 111111111111$（1 が 12 桁）

で考えてもよい，ということです．このことは，一

般に大小関係のある桁数であれば証明できていますから，繰り返し用いることができます！つまり，16桁からさらに12桁削って

$a_4=1111$（1が4桁）

$a_{12}=111111111111$（1が12桁）

で考えられる，ということです．12桁を削るのは1回だけではなく，桁数が12桁以下になるまで何回でも削ることができます．このことを文字を用いて表すと，以下のようになります．

$$\begin{aligned}\gcd(a_m,\ a_n)&=\gcd(a_n,\ a_{m-n})\\&=\gcd(a_n,\ a_{m-2n})\\&=\gcd(a_n,\ a_{m-3n})\\&=\cdots\cdots\\&=\gcd(a_n,\ a_{m-ln})\\&=\gcd(a_n,\ a_{m-(l+1)n})\end{aligned}$$

（ただし l は，$m-ln>n$ を満たす最大の自然数）

m から n を引ける限り引く．これすなわち，m を n で割って余りを考えることにほかなりません．ということは，問題で与えられたユークリッドの互除法の記号が活用できそうですね．

加えて，先に挙げた

$a_4=1111$（1が4桁）

$a_{12}=111111111111$（1が12桁）

まで来ると，桁数の大小が入れ替わりましたので，次は立場を逆にして，a_{12} から4桁ずつ削っていくことができます．ここでも，できる限り桁数を削っていくと，まず

$a_4=1111$（1が4桁）

$a_8=11111111$（1が8桁）

の2数になります．さらに削ると

$a_4=1111$（1が4桁）

$a_4=1111$（1が4桁）

と同じ数になり，a_4 が最大公約数だとわかります．

以上の内容を，問題で与えられた記号を活用しながら，一般に文字で記述してみましょう．

［解答］

(3)　枠で囲まれたユークリッドの互除法の説明文で使用されている記号に対し，$r_1=m$，　$r_2=n$，$r_k=d$ として，r_1，r_2，……，r_k と q_2，q_3，……，q_k を定める．k が3以上の自然数のとき，$i=1$，2，……，$k-2$ に対して，　(2)で示したことを繰り返し用いて

$$\begin{aligned}\gcd\left(a_{r_i},\ a_{r_{i+1}}\right)&=\gcd\left(a_{r_{i+1}},\ a_{r_{i+1}-r_i}\right)\\&=\gcd\left(a_{r_{i+1}},\ a_{r_{i+1}-2r_i}\right)\\&=\cdots\cdots\cdots\\&=\gcd\left(a_{r_{i+1}},\ a_{r_{i+1}-r_iq_i}\right)\\&=\gcd\left(a_{r_{i+1}},\ a_{r_{i+2}}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\gcd(a_m,\ a_n)&=\gcd\left(a_{r_1},\ a_{r_2}\right)\\&=\gcd\left(a_{r_2},\ a_{r_3}\right)\\&=\cdots\cdots\cdots\\&=\gcd\left(a_{r_{k-1}},\ a_{r_k}\right)\\&=\gcd\left(a_{r_kq_k},\ a_{r_k}\right)\\&=\gcd\left(a_{dq_k},\ a_d\right)\end{aligned}$$

とできる．$k=2$ のときも，$r_1=r_2q_2=dq_2$ かつ $r_2=d$ であるから，これでよい．q_k が2以上の自然数であるとき，(2)で示したことを，再度繰り返し用いて

$$\begin{aligned}\gcd\left(a_{dq_k},\ a_d\right)&=\gcd\left(a_d,\ a_{dq_k-d}\right)\\&=\gcd\left(a_d,\ a_{dq_k-2d}\right)\\&=\cdots\cdots\cdots\\&=\gcd\left(a_d,\ a_d\right)\\&=a_d\end{aligned}$$

が成り立つ．$q_k=1$ のときも，これでよい．以上より

$\gcd(a_m,\ a_n)=a_d$

が成り立つことが示された．

（証明終）

強者の戦略

《解説》

いかがでしたでしょうか．おそらく，強者たらんとしている皆さんであれば，模範解答を見てしまえば，なんとなく解法の流れの雰囲気を察してしまえるのだと思います．ただ，今回の場合は，大学入試の会場で模範解答なしで，自分の頭の中にある考えを問題で与えられた記号と上手に繋げて説明する力が求められています．他の出題者の皆様も頻繁に話題に出していると思いますが，この問題に限らず，初見の問題（特に数列，確率，整数）は，具体的に実験して様子を確認する手法が有効です．具体例を踏まえて

(2) の証明結果から，$\gcd(a_m,\ a_n)$ $(m > n)$ を考える際に，桁数について m から n を（大小関係が保たれる限り）引くことができる．

↓

なるべく桁数が小さくなるように考えると，m から n をできる限り引きたい．これはすなわち，割り算である．

↓

a_m，a_n の桁数，つまり，添字の番号の部分について，ユークリッドの互除法の記号が使える．

と思考を繋げて，問題の記号の生かし方を思いつきたいところです．

今年初めての「共通テスト」が実施され，今後は今まで以上に「共通テスト」用の問題集が出版され，書店などに並ぶことになると思います．その演習をする際，初見の問題に出会ったときはチャンスです！今回のような入試問題で使う力を磨くべく，マークシート形式であってもなるべく記述答案を作成し，初見の問題に対する答案作成能力を高めていきましょう．

（数学科　中西）