強者の戦略

今回の問題はいかがでしたか？ 1 の 17 乗根の問題でした．

問題

n を 0 以上の整数とする．$x_n = 2\cos\dfrac{2n}{17}\pi$ のとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$ とするとき，$x_1(s+1) = 2s+2$ となることを示せ．

(2)　$t = x_1 + x_2 + x_4 + x_8$ とするとき，$t^2 + t - 4 = 0$ となることを示せ．

(3)　$x_1 + x_4$ の値を求めよ．

《考え方》

(1) は cos の足し算についての問題です．2，3 個の和なら，2 倍角や 3 倍角の公式を使って簡単にできるかもしれませんが今回はなかなか大変そうです．

$$(\text{左辺}) = x_1x_1 + x_1x_2 + \cdots\cdots\cdots + x_1x_8 + x_1$$

$$(\text{右辺}) = 2x_1 + 2x_2 + \cdots\cdots\cdots + 2x_8 + 2$$

ですから，左辺と右辺で次数が異なることに注目しましょう．cos の積の次数を下げるために，「積・和の公式」

$$\boxed{\cos A\cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\}}$$

が使えそうです．

表示を簡単にするために，$\theta = \dfrac{2\pi}{17}$ とおくことにします．

すると

$$x_k = 2\cos k\theta$$

と表せます．i，j を 1 以上 8 以下の整数とします．$i \geqq j$ のとき「積・和の公式」を用いて

$$\begin{aligned} x_ix_j &= 4\cos i\theta\cos j\theta \\ &= 2\{\cos(i+j)\theta + \cos(i-j)\theta\} \\ &= x_{i+j} + x_{i-j} \end{aligned}$$

となることが分かります．これで，うまくいきそうです．

$$x_1x_1 = x_2 + x_0$$

$$x_1x_2 = x_3 + x_1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1x_8 = x_9 + x_7$$

ですから，これらを辺々加えることで

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= x_1x_1 + x_1x_2 + \cdots\cdots\cdots + x_1x_8 + x_1 \\ &= (x_2 + x_3 + \cdots\cdots\cdots + x_9) \\ &\quad + (x_0 + x_1 + \cdots\cdots\cdots + x_7) + x_1 \\ &= 2(x_1 + x_2 + \cdots\cdots\cdots + x_8) + x_9 + x_0 - x_8 \\ &= 2s + x_9 + x_0 - x_8 \end{aligned}$$

となります．ここで

$$\begin{aligned} x_0 &= 2\cos 0 = 2 \\ x_9 &= 2\cos\frac{18\pi}{17} = 2\cos\left(2\pi - \frac{16\pi}{17}\right) \\ &= 2\cos\frac{16\pi}{17} = x_8 \end{aligned}$$

であることから

$$2s + x_9 + x_0 - x_8 = 2s + 2$$

となります．よって

$$x_1(s+1) = 2s+2$$

となることが証明できました．

＊　　　＊　　　＊

一般に，θ が 2π の整数倍でないとき

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta$$

を計算するときのテクニックとして次のものがあります．

元の和に $\sin\dfrac{\theta}{2}$ をかけた

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

を計算し，最後に $\sin\dfrac{\theta}{2}$ $(\fallingdotseq 0)$ で割る．

これを用いてみましょう．まず，「積・和の公式」

$$\boxed{\cos A\sin B = \frac{1}{2}\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\}}$$

を用いると

$$\begin{aligned} \cos k\theta\sin\frac{\theta}{2} &= \frac{1}{2}\left\{\sin\left(k\theta + \frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(k\theta - \frac{\theta}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\sin\frac{(2k+1)}{2}\theta - \sin\frac{(2k-1)}{2}\theta\right\} \end{aligned}$$

となります．$k = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, n$ として加えることで

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta\sin\frac{\theta}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\frac{(2k+1)}{2}\theta - \sin\frac{(2k-1)}{2}\theta\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\sin\frac{3}{2}\theta - \sin\frac{\theta}{2}\right) + \left(\sin\frac{5}{2}\theta - \sin\frac{3}{2}\theta\right)\right. \\ &\qquad \left. + \cdots\cdots\cdots + \left(\sin\frac{(2n+1)}{2}\theta - \sin\frac{(2n-1)}{2}\theta\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\sin\frac{(2n+1)}{2}\theta - \sin\frac{\theta}{2}\right\} \end{aligned}$$

と計算できます．

これを s の計算に用いてみます．$\theta=\dfrac{2\pi}{17}$ ですから，$n=8$ とすると

$$\begin{aligned}&\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta\\&=\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{(2n+1)}{2}\theta-\sin\frac{\theta}{2}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{17}{2}\cdot\frac{2\pi}{17}-\sin\frac{\pi}{17}\right\}\\&=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{17}\end{aligned}$$

です．よって

$$s=\sum_{k=1}^{8}x_k=\sum_{k=1}^{8}2\cos k\theta=2\cdot\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}}=-1$$

です．ということは，示すべき式について

(左辺) $=x_1(s+1)=0$

(右辺) $=2s+2=0$

ですから，(左辺) = (右辺) と分かります．

ここで「和・積の公式」

$$\boxed{\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

を用いると

$$\sin\frac{(2n+1)}{2}\theta-\sin\frac{\theta}{2}=2\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta$$

となります．よって

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta\sin\frac{\theta}{2}\\&=\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{(2n+1)}{2}\theta-\sin\frac{\theta}{2}\right\}\\&=\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta\end{aligned}$$

より

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\frac{\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

と分かります．

*　　　*　　　*

この方法は，sin の和についても同様に行えます．すなわち，θ が 2π の整数倍でないとき

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$$

を計算する場合，次のようにします．

> 元の和に $\sin\dfrac{\theta}{2}$ をかけた
>
> $$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta\sin\frac{\theta}{2}$$
>
> を計算し，最後に $\sin\dfrac{\theta}{2}$ $(\neq 0)$ で割る．

これを用いると，cos のときと同様の計算により

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

を導くことができます．

*　　　*　　　*

さて，この cos や sin の和を統一的に扱う方法があります．『複素数平面：極形式の利用』です．

$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと

$$\cos\theta=\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad \sin\theta=\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

です．とくに *de Moivre* の定理から，自然数 k について

$$z^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$$

が成り立つことから

$$\cos k\theta=\mathrm{Re}(z^k)=\frac{z^k+\overline{z^k}}{2},\quad \sin k\theta=\mathrm{Im}(z^k)=\frac{z^k-\overline{z^k}}{2i}$$

となります．これを利用すると s を簡単に求められます．

$z=\cos\dfrac{2\pi}{17}+i\sin\dfrac{2\pi}{17}$ とおくと，$z^{17}=1$ です．よって

$$x_k=z^k+\overline{z^k}=z^k+z^{17-k}$$

です．$z\neq 1$ ですから，等比数列の和の公式を用いて

$$\begin{aligned}s+1&=1+z+\cdots\cdots+z^{16}\\&=\frac{1-z^{17}}{1-z}\\&=0\end{aligned}$$

と分かります．したがって，$s=-1$ です．

また

$$\begin{aligned}&z+z^2+\cdots\cdots+z^n\\&=\left(\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta\right)+i\left(\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta\right)\end{aligned}$$

ですから，両辺の実部や虚部を比べることによって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta$ や $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$ が計算できますね．

どうでしょうか．複素数を利用すると，非常にスッキリと計算することができましたね．ちなみに，数学 B で学ぶ数列の公式はすべて複素数の世界でも使えますから，安心してください．

＊　　　＊　　　＊

(2) も考えてみましょう．まずは t^2 を計算して，それに $t-4$ を加えます．なかなかハードです．$x_k=x_{17-k}$ であること，(1) の「積・和公式」などを利用して，整理しながら進みます．

まず，2 乗を展開すると

$$\begin{aligned}t^2&=x_1{}^2+x_2{}^2+x_4{}^2+x_8{}^2\\&\quad+2x_1x_2+2x_1x_4+2x_1x_8\\&\quad+2x_2x_4+2x_2x_8+2x_4x_8\end{aligned}$$

です．ここで

$$\begin{aligned}&x_1{}^2=x_1x_1=x_2+x_0\\&x_2{}^2=x_2x_2=x_4+x_0\\&\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

であることや

$$\begin{aligned}&x_1x_2=x_3+x_1\\&x_1x_4=x_5+x_3\\&\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

であることを用いると

$$\begin{aligned}t^2&=(x_2+x_0)+(x_4+x_0)+(x_8+x_0)+(x_{16}+x_0)\\&\quad+2(x_3+x_1)+2(x_5+x_3)+2(x_9+x_7)\\&\quad+2(x_6+x_2)+2(x_{10}+x_6)+2(x_{12}+x_4)\\&=(x_2+2)+(x_4+2)+(x_8+2)+(x_1+2)\\&\quad+2(x_3+x_1)+2(x_5+x_3)+2(x_8+x_7)\\&\quad+2(x_6+x_2)+2(x_7+x_6)+2(x_5+x_4)\\&=3(x_1+x_2+x_4+x_8)+8\\&\quad+4(x_3+x_5+x_6+x_7)\\&=3t+8+4(s-t)\\&=3t+8+4(-1-t)\\&=-t+4\end{aligned}$$

です．よって

$$t^2+t-4=0$$

が成り立ちます．これで示せました．

ところで，この方程式の解は

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$

ですが，$x_1+x_2+x_4+x_8$ の値としてふさわしいのは

$$t=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

の方です．なぜならば

$$\frac{2\pi}{17}<\frac{4\pi}{17}<\frac{8\pi}{17}<\frac{\pi}{2}<\frac{16\pi}{17}<\pi$$

より

$$\cos\frac{2\pi}{17}>\cos\frac{4\pi}{17}>\cos\frac{8\pi}{17}>0>\cos\frac{16\pi}{17}>-1$$

が成り立ち，ゆえに

$$x_1>x_2>x_4>0>x_8>-2$$

が成り立つからです．$t>-2$ となるので $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\,(<-2)$ は不適です．

(3) では，t を x_1+x_4 と x_2+x_8 に分けて計算することで解決します．すなわち，$x_1+x_4=a$，$x_2+x_8=b$ とおき

$a+b$ と ab を求める

ことで，a，b を解にもつ 2 次方程式を立式し，それを解いて a を求めるという方針です．

$$a+b=t$$

であることはよいでしょう．ab については

$$\begin{aligned}ab&=(x_1+x_4)(x_2+x_8)\\&=x_1x_2+x_1x_8+x_4x_2+x_4x_8\\&=(x_3+x_1)+(x_9+x_7)+(x_6+x_2)+(x_{12}+x_4)\\&=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8\\&=s=-1\end{aligned}$$

となります．$ab=s$ になるのはびっくりしますね．これらから a，b は x の 2 次方程式

$$x^2-tx-1=0$$

の 2 解であると言えます．ところで

$$x_1>x_2>x_4>0>x_8>-2$$

が成り立つのでした．ここから，$a>b$ であることが分かり

$$\begin{aligned}a&=\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}+\sqrt{\frac{18-2\sqrt{17}}{4}+4}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)\end{aligned}$$

と計算できます．なかなかすごい値になりました．

ここまでの計算をまとめておきましょう．

《解答》

(1)　$z=\cos\dfrac{2\pi}{17}+i\sin\dfrac{2\pi}{17}$ とおく．$z^{17}=1$ であり

$$x_k=z^k+\overline{z^k}=z^k+z^{17-k}$$

である．$z\neq 1$ であるから

$$\begin{aligned}s+1&=1+z+\cdots\cdots\cdots+z^{16}\\&=\frac{1-z^{17}}{1-z}\\&=0\end{aligned}$$

である．よって，$x_1(s+1)=2s+2$ が成り立つ．

(2)　(1) より

$$(x_1-2)(s+1)=0$$

である．$x_1 \fallingdotseq 2$ であるから，$s=-1$ である．

1 以上 8 以下の整数 i，j $(i \geqq j)$ に対し

$$x_i x_j = x_{i+j} + x_{i-j}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} t^2 &= x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_4{}^2 + x_8{}^2 \\ &\quad + 2x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_1x_8 \\ &\quad + 2x_2x_4 + 2x_2x_8 + 2x_4x_8 \\ &= (x_2+x_0)+(x_4+x_0)+(x_8+x_0)+(x_{16}+x_0) \\ &\quad + 2(x_3+x_1)+2(x_5+x_3)+2(x_9+x_7) \\ &\quad + 2(x_6+x_2)+2(x_{10}+x_6)+2(x_{12}+x_4) \\ &= (x_2+2)+(x_4+2)+(x_8+2)+(x_1+2) \\ &\quad + 2(x_3+x_1)+2(x_5+x_3)+2(x_8+x_7) \\ &\quad + 2(x_6+x_2)+2(x_7+x_6)+2(x_5+x_4) \\ &= 3(x_1+x_2+x_4+x_8)+8 \\ &\quad + 4(x_3+x_5+x_6+x_7) \\ &= 3t+8+4(s-t) \\ &= 3t+8+4(-1-t) \\ &= -t+4 \end{aligned}$$

である．よって

$$t^2+t-4=0$$

が成り立つ．

(3)　$x_1 > x_2 > x_4 > 0 > x_8 > -2$　……… $(*)$

であるから $t > -2$ である．よって，$t^2+t-4=0$ を解くと

$$t=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

である．

$x_1+x_4=a$，$x_2+x_8=b$ とおく．

$$a+b=t$$

である．

$x_1+x_4=a$，$x_2+x_8=b$ とおく．

$$a+b=t$$

である．

また

$$\begin{aligned} ab &= (x_1+x_4)(x_2+x_8) \\ &= x_1x_2+x_1x_8+x_4x_2+x_4x_8 \\ &= (x_3+x_1)+(x_9+x_7)+(x_6+x_2)+(x_{12}+x_4) \\ &= x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8 \\ &= s=-1 \end{aligned}$$

であるから，a，b は x の 2 次方程式

$$x^2-tx-1=0$$

の 2 解である．$(*)$ より $a>b$ であるから

$$\begin{aligned} a &= \frac{t+\sqrt{t^2+4}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}+\sqrt{\frac{18-2\sqrt{17}}{4}+4}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right) \end{aligned}$$

である．

＊　　　＊　　　＊

せっかくですから，$a\,(=x_1+x_4)$ の値を求めておしまいにするのでなく，もっと計算して，x_1 まで求めてみましょう．

$u=x_3+x_5+x_6+x_7$ とおくと

$$t+u=x_1+\cdots\cdots\cdots+x_8=s=-1$$

ですから，$u=-1-t$ です．すなわち

$$u=-1-\frac{-1+\sqrt{17}}{2}=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

です．$x_3+x_5=c$，$x_6+x_7=d$ として同様に計算すると

$$c+d=u$$

であり

$$\begin{aligned} cd &= (x_3+x_5)(x_6+x_7) \\ &= x_3x_6+x_5x_6+x_3x_7+x_5x_7 \\ &= (x_9+x_3)+(x_{11}+x_1)+(x_{10}+x_4)+(x_{12}+x_2) \\ &= x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8 \\ &= s=-1 \end{aligned}$$

です．ゆえに，c，d は x の 2 次方程式

$$x^2-ux-1=0$$

の 2 解です．ここで

$$\frac{6\pi}{17}<\frac{\pi}{2}<\frac{10\pi}{17}<\frac{12\pi}{17}<\frac{14\pi}{17}<\pi$$

より

$$\cos\frac{6\pi}{17}>0>\cos\frac{10\pi}{17}>\cos\frac{12\pi}{17}>\cos\frac{14\pi}{17}>-1$$

ですから

$$x_3>0>x_5>x_6>x_7>-2$$

が成り立ちます．よって，$c>d$ です．したがって

$$\begin{aligned} c &= \frac{u+\sqrt{u^2+4}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}+\sqrt{\frac{18+2\sqrt{17}}{4}+4}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right) \end{aligned}$$

と分かりました．もう一息です．

$$x_1+x_4=a,\ x_1x_4=x_3+x_5=c$$

ですから，x_1，x_4 は x の 2 次方程式

$$x^2-ax+c=0$$

の 2 解です．$x_1>x_4$ に注意すると

$$x_1=\frac{a+\sqrt{a^2-4c}}{2}$$

です．

前半部分は

$$\frac{a}{2}=\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)$$

です．

後半部分は

$$\frac{\sqrt{a^2-4c}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)^2+1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\Bigg\}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}$$

です．途中の計算について，確かめておきましょう．

$$\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)^2+1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}$$
$$=\frac{1}{16}\Big\{\left(1-2\sqrt{17}+17\right)+\left(34-2\sqrt{17}\right)$$
$$-2\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$
$$+16+16\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\Big\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(17+3\sqrt{17}\underbrace{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{17-\sqrt{17}}-4\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}}}_{(**)}\right)$$

となります．(**) の部分について

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{17-\sqrt{17}}+4\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{17-\sqrt{17}}\left(1-\sqrt{17}+8\sqrt{\frac{17+\sqrt{17}}{17-\sqrt{17}}}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{17-\sqrt{17}}\left\{1-\sqrt{17}+2\left(\sqrt{17}+1\right)\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{17-\sqrt{17}}\left(3+\sqrt{17}\right)\ (>0)$$

ですから，これを 2 乗すると

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{17-\sqrt{17}}\left(3+\sqrt{17}\right)\right\}^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(17-\sqrt{17}\right)\left(26+6\sqrt{17}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{17\cdot26-6\cdot17+(6\cdot17-26)\sqrt{17}\right\}$$
$$=170+38\sqrt{17}$$

です．よって

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{17-\sqrt{17}}+4\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}}$$
$$=\sqrt{170+38\sqrt{17}}$$

とまとめられます．

以上から

$$\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{x_1}{2}$$
$$=\frac{1}{16}\Big(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$
$$+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\Big)$$

と分かりました．脳が破裂しそうですね．

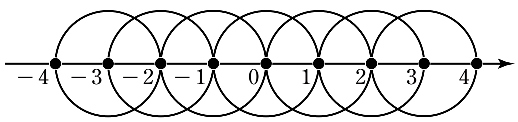
＊　　　＊　　　＊

実はここから，すごいことが分かります．

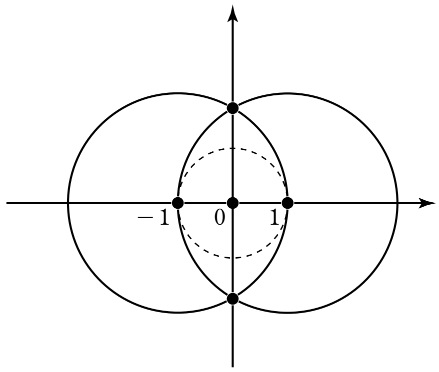
「正 17 角形は定規とコンパスで作図できる」

という事実です．1796 年当時 19 歳だった大数学者ガウスが発見したと言われています．どういうことか，見てみましょう．

まず，複素数平面上の原点 O(0) と点 A(1) からスタートしましょう．定規で実軸が引けます．さらにコンパスを使えば，中心 O，半径 OA の円を描くことができ，実軸との交点を考えれば，-1 が作図できます．中心 A 半径 OA の円と実軸との交点をとって 2 も作図できます．繰り返していくと，実軸上の格子点はすべて作図可能です．



定規とコンパスで与えられた直線に直交する直線も作図できます．中心 1 で半径 2 の円と中心が -1 で半径 2 の円を描き，その 2 交点を通る直線を定規で引けば，虚軸の完成です．

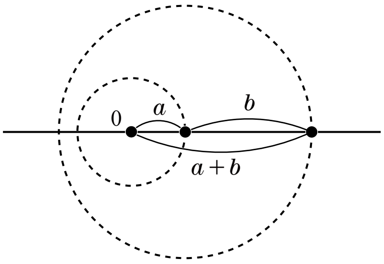


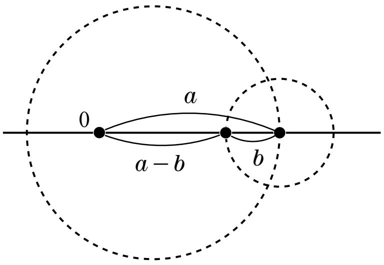
よって，複素数平面上の格子点はすべて作図可能と分かります．

次に，作図可能な点 a，b（a，b は正の実数）に対し

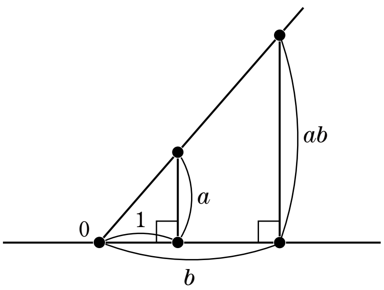
和 $a+b$，差 $a-b$，積 ab，商 $\dfrac{a}{b}$　$(b\neq0)$

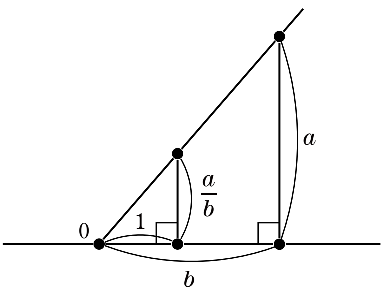
も作図可能なことを確認します．次の図のようにします．





積，商は，三角形の相似を利用します.





これで，実部および虚部が有理数であるような複素数はすべて作図可能であることが分かりました.

さらに，根号で表される数も作図可能です．すなわち，与えられた正の有理数 a に対し，$\sqrt{a}$ が作図できます．手順は次の通りです.

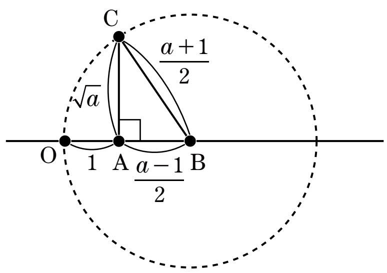
(1) 原点 O と点 A(1) に対し，$\mathrm{B}\left(\dfrac{a+1}{2}\right)$ を作図する.

(2) 中心 B，半径 OB の円を描く.

(3) 点 A を通り直線 OB に垂直な直線と円の交点 C をとる.

(4) 線分 AC の長さが $\sqrt{a}$ になる.

$$\because\ \mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{BC}^2-\mathrm{AB}^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{a}$$



これを繰り返し用いると

$\sqrt{2}$，$\sqrt{\sqrt{2}}$，$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$，………

などはすべて作図可能と分かります．もっと複雑な

$$1+\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{5+\sqrt{7}}}$$

のような数も作図可能です.

直線と円の方程式は高々 2 次式なので，連立して交点の座標を求める際に根号が出てきます．ここからも，有理数に対し根号をとった数が作図可能であることが想像できるでしょう.

まとめると，以下のことが言えます.

> 実部・虚部が
>
> **有理数**
>
> および
>
> **その四則演算・根号をとる操作の繰り返しで得られる数**
>
> であるような複素数は，複素数平面上に図示できる.

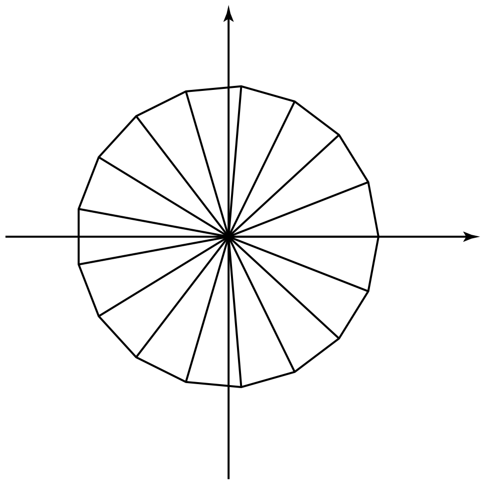
3 乗根や 5 乗根などは定規とコンパスで図示できるとは限りません．確実に作図可能なのは根号，すなわち 2 乗根を繰り返しとってできる 2^n 乗根とその組み合わせです.

先程求めた $\cos\dfrac{2\pi}{17}$ の値を見てみましょう．

$$\frac{1}{16}\Bigl(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$
$$+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\Bigr)$$

ですから，有理数の四則演算および根号をとる操作でできる数になっています．すなわち，定規とコンパスで作図可能です！

ここから，正 17 角形が定規とコンパスを用いて図示できることが分かるのです．驚愕の事実ですね．



*　　　*　　　*

次の興味は「いつ作図可能で，いつ作図可能でないか」です．これは，「ガロア理論」を学ぶと答えが得られます．古典的な「角の三等分線問題」すなわち「与えられた角に対し，定規とコンパスで常に三等分線が引けるか？」という問いや，「一般的な 5 次方程式について，四則演算と根号をとる操作で作られる解の公式はあるか？」という問題についても，結論が分かります．興味のある方は，ぜひ調べてみてください．

私も久々に教科書を引っ張り出してきて，「ガロア理論」を復習してみようかな？なんて考えています．

笹谷