今回の問題のテーマを見抜くことができたでしょうか．

問題

xy 平面上の原点 O を通る直線 l を考える．l 上の 2 点 P と Q は以下の 3 条件を満たすとする．

(1)　2 点 P，Q の x 座標，y 座標はすべて 0 以上である．

(2)　線分 OP と線分 OQ の長さの積は 1 である．

(3)　点 P と直線 $x=1$ との距離は，線分 OP の長さに等しい．

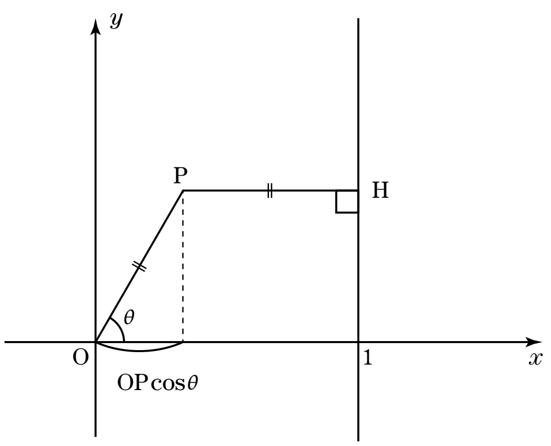
x 軸の正の部分と線分 OQ のなす角を θ とする．
次の問いに答えよ．

問 1　線分 OQ の長さを θ を用いて表せ．

問 2　θ が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで変化するときに，線分 OP が通過する部分の面積を S，線分 OQ が通過する部分の面積を T とする．S と T の値をそれぞれ求めよ．

《考え方》

問 1 について，求めるものは線分 OQ の長さです．OQ についての情報は (2) にあります．OP・OQ＝1 です．ということは線分 OP の長さを求めたら良さそうです．(3) に OP についての情報があります．点 P から直線 $x=1$ に下ろした垂線の足を H とすると，OP＝PH です．x 軸正の部分と線分 OQ のなす角が θ ですから，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角も θ です．OP$\cos\theta \leqq$ OP＝PH ですから，点 P が直線 $x=1$ の右側に来ることはありません．



(1) から $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ と分かります．点 P の x 座標に注目し，2 通りで表して比べると

$$\mathrm{OP}\cos\theta = 1-\mathrm{PH}\ (=1-\mathrm{OP})$$

ですから

$$(1+\cos\theta)\mathrm{OP}=1 \qquad \therefore\ \mathrm{OP}=\frac{1}{1+\cos\theta}$$

です．これで

$$\mathrm{OQ}=\frac{1}{\mathrm{OP}}=1+\cos\theta$$

と分かります．

問 2 は線分の通過領域の面積です．まずは線分 OP の通過領域の面積 S から考えてみましょう．点 P の軌跡の求め方の方針はいくつかあります．

①　P$(X,\ Y)$ とおき，OP＝PH から X，Y の関係式を作る．

②　P$(X,\ Y)$，OP＝$r\ (>0)$ とおき，$X=r\cos\theta$，$Y=r\sin\theta$ とする．r，θ を消去して，X，Y の関係式を作る．（r，θ の存在条件で考える．）

③　OP＝$r\ (>0)$ とおき，問 1 の結果から極方程式を求める．

④　OP＝PH から，点 O を焦点，$x=1$ を準線とする放物線と分かるので，それを求める．

どの方針で行くにせよ，④の発想（放物線の定義）から，「たぶん軌跡は横向き右に凸の放物線になるだろうなあ」と思いつつ計算していってください．

①の方針でやってみましょう．P$(X,\ Y)$ とおきます．

$$\mathrm{OP}=\mathrm{PH}$$

は，OP $\geqq 0$ かつ PH $\geqq 0$ のもとで

$$\mathrm{OP}^2=\mathrm{PH}^2$$

と同値です．X，Y で表すと

$$X^2+Y^2=(1-X)^2$$

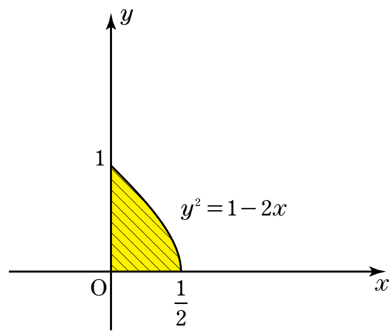
ですから，これを整理して

$$Y^2=1-2X$$

を得ます．よって，点 P の軌跡は

放物線（の一部）$y^2=1-2x\quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2},\ 0 \leqq y \leqq 1\right)$

です．



②の方針だと，次のようになります．

$\mathrm{OP}\cos\theta = 1 - \mathrm{PH}$（$= 1 - \mathrm{OP}$）

より，$\mathrm{OP} = r$ を代入し整理すると

$1 - r\cos\theta = r$

です．$0 < r \leqq 1$ ですから，両辺ともに 0 以上です．よって，各辺 2 乗して

$(1 - r\cos\theta)^2 = r^2$

としても同値です．$X = r\cos\theta$，$r^2 = X^2 + Y^2$ ですから

$(1 - X)^2 = X^2 + Y^2$

となり，あとは ① の方針と同じです．

③の方針なら，問 1 の結果から

$$r = \frac{1}{1 + \cos\theta}$$

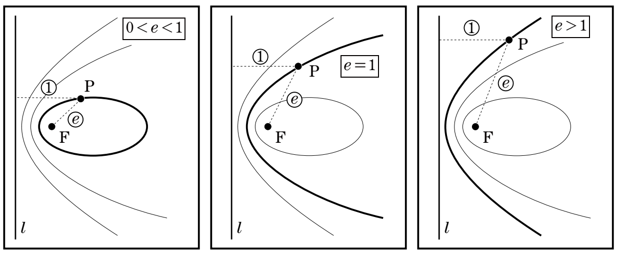
とすぐに極方程式が求められますが，これが放物線であることに気付くには極方程式で表された二次曲線の離心率による分類の知識が必要です．一般に，定数 k と離心率 e について，極方程式

$$r = \frac{k}{1 + e\cos\theta}$$

で表される曲線は

$0 < e < 1$ のとき	楕円
$e = 1$ のとき	放物線
$e > 1$ のとき	双曲線

を表します．今回は $e = 1$ の場合です．



④の方針の場合，点 P の軌跡は焦点 O，準線 $x = 1$ の放物線であると分かっています．まず，x 軸方向に $-\frac{1}{2}$ だけ平行移動した放物線を考えます．焦点 $\mathrm{O}'\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$，準線 $x = \frac{1}{2}$ の放物線は

$$y^2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x \qquad \therefore\ y^2 = -2x$$

です．これを x 軸方向に $\frac{1}{2}$ だけ平行移動して戻せば

$y^2 = 1 - 2x$

になります．

放物線と直線で囲まれた部分の面積 S は，積分法を利用して求めます．横向きの放物線なので，y で積分すると簡単です．

積分区間について，$y^2 = 1 - 2x$ と $x = 0$ を連立すると交点が $(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$ と分かります．線分 OP が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の部分のみ動くことを踏まえると

$$S = \int_0^1 x\,dy = \int_0^1 \frac{1 - y^2}{2}\,dy = \frac{1}{2}\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

です．また，いわゆる「1/6 公式」も使えます．

$$\int_{-1}^1 (1 - y^2)\,dy = 2\int_0^1 (1 - y^2)\,dy$$

$$\therefore\ \int_0^1 (1 - y^2)\,dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1 - y^2)\,dy$$

ですから

$$S = -\frac{1}{4}\int_{-1}^1 (y - 1)(y + 1)\,dy = \frac{1}{24}(1 + 1)^3 = \frac{1}{3}$$

となります．

*　　　　*　　　　*

T について，点 Q の軌跡の方程式を求めるのはなかなか厄介です．パラメータ θ を用いた表示を用いて

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)$$

を求め，点 Q の動きを増減表にまとめることで，概形が分かります．パラメータで表された関数のグラフと面積の問題では

① （反り返りに注意して）グラフを描く．

② x，y を使って，面積を積分で立式する．

③ x，y をパラメータ θ で置換する．

という手順を踏むと計算が進む場合が多いです．手順が多く，計算は複雑になりますが，ここをゴリ押しで乗り切る力も必要です．実際にやってみましょう．

まず，問 1 の結果，$\mathrm{OQ} = 1 + \cos\theta$ と

$x = \mathrm{OQ}\cos\theta$，$y = \mathrm{OQ}\sin\theta$

であることから，点 Q のパラメータ表示は

$$\begin{cases} x = (1 + \cos\theta)\cos\theta \\ y = (1 + \cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

です．

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= -\sin\theta\cos\theta + (1 + \cos\theta)\cdot(-\sin\theta) \\ &= -\sin\theta(1 + 2\cos\theta)\end{aligned}$$

ですが，θ の変域が $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ であることから，$\frac{dx}{d\theta} \leqq 0$ です．よって，x は単調に減少します．反り返りはありません．

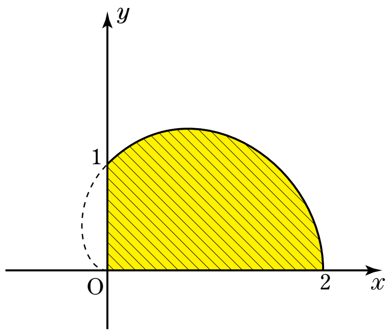
また

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= -\sin\theta\sin\theta + (1 + \cos\theta)\cos\theta \\ &= (1 + \cos\theta)(2\cos\theta - 1)\end{aligned}$$

ですから，y の増減は次のようになります．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	1

これらの情報から，点 Q の軌跡は次のようになります．



T は図の斜線部（色付き部分）の面積ですから

$$
\begin{aligned}
T&=\int_0^2 y\,dx\\
&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1+\cos\theta)\sin\theta\cdot\{-\sin\theta(1+2\cos\theta)\}d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)(1+2\cos\theta)\sin^2\theta\,d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+3\cos\theta+\cos^2\theta-3\cos^3\theta-2\cos^4\theta)d\theta\\
&=\frac{\pi}{2}+3\cdot1+\frac{\pi}{4}-3\cdot\frac{2}{3}-2\cdot\frac{3}{16}\pi\\
&=1+\frac{3}{8}\pi
\end{aligned}
$$

です．途中で，次数下げや置き換えを利用して

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1,
$$

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4},
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta\\
&=\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

と計算しました．$\cos^4\theta$ のところはかなり面倒ですが

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)^2d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+2\cos2\theta+\cos^2 2\theta}{4}d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{\cos2\theta}{2}+\frac{1+\cos4\theta}{8}\right)d\theta\\
&=\left[\frac{3}{8}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta+\frac{1}{32}\sin4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{3}{16}\pi
\end{aligned}
$$

となります．さすがに面倒すぎるので，「積分漸化式」を利用した方が早いかもしれません．

$$
I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\,d\theta\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots)
$$

とおきます．ただし，$\cos^0\theta=1$ とします．部分積分を用いて

$$
\begin{aligned}
I_{n+2}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2}\theta\,d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}\theta\cos\theta\,d\theta\\
&=\left[\cos^{n+1}\theta\cdot\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&\qquad-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n+1)\cos^n\theta(-\sin\theta)\cdot\sin\theta\,d\theta\\
&=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^2\theta\,d\theta\\
&=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta(1-\cos^2\theta)d\theta\\
&=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\,d\theta-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2}\theta\,d\theta\\
&=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}
\end{aligned}
$$

となりますから

$$
(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n\qquad\therefore\ I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n
$$

がすべての 0 以上の整数で成り立ちます．この漸化式を用いて

$$
I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2},\ I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=1,
$$
$$
I_2=\frac{1}{2}I_0=\frac{\pi}{4},\ I_3=\frac{2}{3}I_1=\frac{2}{3},\ I_4=\frac{3}{4}I_2=\frac{3}{16}\pi
$$

と計算できます．

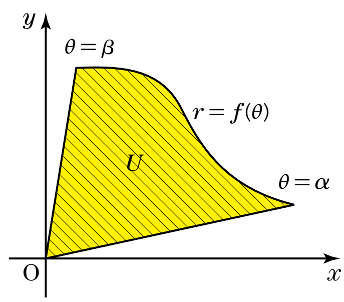
＊　　　＊　　　＊

せっかく極方程式が分かっているのですから，これを利用するのも一つの手です．

一般に，極方程式 $r=f(\theta)$ で表される曲線と 2 直線 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ で囲まれる部分の面積 U は

$$
U=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}r^2\,d\theta
$$

で計算できます．



これを用いてみます．点 Q の軌跡の極方程式が $r=1+\cos\theta$ ですから

$$
\begin{aligned}
T&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\,d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\cdot1+\frac{\pi}{4}\right)\\
&=1+\frac{3}{8}\pi
\end{aligned}
$$

と比較的簡単に計算できます．「増減調べて，グラフを考えて，$\cos^3\theta$ や $\cos^4\theta$ の積分を計算して…」という手間を大幅に減らせます．

ただし，この「極方程式を用いた面積公式」がいつも楽かと言われるとそうとは限りません．

例えば S はどうでしょうか．点 P の軌跡の極方程式は

$$r=\frac{1}{1+\cos\theta}$$

ですから

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)^2d\theta$$

となりますが，これはなかなか大変です．この積分は

$$t=\tan\frac{\theta}{2}$$

という置換を用いて解決します．

$$
\begin{aligned}
&\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=2\cdot\frac{1}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2},\\
&\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{2t}{1+t^2}
\end{aligned}
$$

であり

$$
\begin{array}{c|ccc}
\theta & 0 & \to & \dfrac{\pi}{2}\\
\hline
t & 0 & \to & 1
\end{array},
$$

$$dt=\frac{d\theta}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{1+t^2}{2}d\theta \qquad \therefore\ d\theta=\frac{2}{1+t^2}dt$$

ですから

$$
\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{4\cos^4\dfrac{\theta}{2}}\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+t^2)^2}{4}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt\\
&=\frac{1}{4}\int_0^1(1+t^2)dt\\
&=\frac{1}{4}\left[t+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1\\
&=\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

となります．高度な定石を使うことになりますから，これなら「1/6 公式」などの方がよっぽど簡単ですね．

このように一見便利そうな公式も，時と場合によって，使ったほうが楽だったり，使わないほうが良かったりします．「たった一つの万能公式・解法」などというものはありません．状況に応じて，様々な考え方を使い分けることが大事です．時間と余裕がない試験会場であたふたしてしまわないように，普段の学習時にいろいろ試行錯誤をしてバランス感覚を養っておきましょう．

以上をまとめて，解答例を作っておきます．

《解答》

問 1　点 P から直線 $x=1$ に下ろした垂線の足を H とする．

OP＝PH である．x 軸正の部分と線分 OQ のなす角が θ であるから，x 軸正の部分と線分 OP のなす角も θ である．

(1) から $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ である．点 P の x 座標に注目し，2 通りで表して比べると

$$\mathrm{OP}\cos\theta=1-\mathrm{PH}\ (=1-\mathrm{OP})$$

であるから

$$(1+\cos\theta)\mathrm{OP}=1 \qquad \therefore\ \mathrm{OP}=\frac{1}{1+\cos\theta}$$

である．よって

$$\mathrm{OQ}=\frac{1}{\mathrm{OP}}=1+\cos\theta$$

である．

問 2　$\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおく．

$$\mathrm{OP}=\mathrm{PH}$$

は，$\mathrm{OP}\geqq0$ かつ $\mathrm{PH}\geqq0$ のもとで

$$\mathrm{OP}^2=\mathrm{PH}^2$$

と同値である．X，Y で表すと

$$X^2+Y^2=(1-X)^2$$

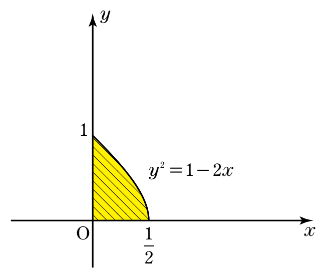
であり，これを整理して

$$Y^2=1-2X$$

を得る．よって，点 P の軌跡は

放物線（の一部）$y^2=1-2x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2},\ 0\leqq y\leqq1\right)$

である．



線分 OP が $x\geqq0$，$y\geqq0$ の部分のみ動くから，S は図の斜線部（色付き部分）の面積であり

$$S=\int_0^1x\,dy=\int_0^1\frac{1-y^2}{2}dy=\frac{1}{2}\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

である．

また，点 Q の軌跡の極方程式が $r=1+\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned}T&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r^2\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^2\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\cdot1+\frac{\pi}{4}\right)\\&=1+\frac{3}{8}\pi\end{aligned}$$

である．

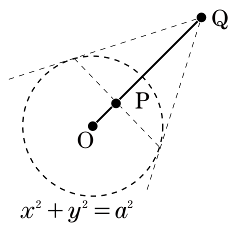
*　　　　*　　　　*

今回の問題の背景について，確認しておきましょう．点 P と点 Q の位置関係は，「反転の位置」と呼ばれています．定義は次の通りです．

平面上の原点 O を端点とする半直線 l 上の 2 点 P，Q が

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=a^2$$

を満たすとき，点 P を点 Q に移す変換を「反転」といい，2 点 P，Q の位置関係を「反転の位置」という．



この中心 O，半径 a の円のことを「反転円」といいます．図形的には，次のようになります．

・$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=a$ のとき，P と Q は同じ点で，反転円上．

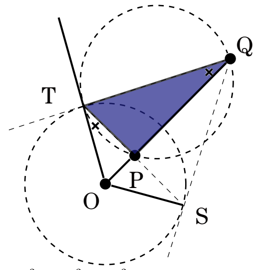
・$\mathrm{OP}<\mathrm{OQ}$ のとき，反転円の外部にある方の点（点 Q）から反転円に引いた 2 本の接線の接点の中点が点 P．

・$\mathrm{OQ}<\mathrm{OP}$ のときも同様．

これを確かめておきましょう．点 Q から反転円に引いた接線の接点の 1 つを T とします．

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=a^2=\mathrm{OT}^2$$

ですから，方べきの定理の逆により，三角形 PQT の外接円と直線 OT は点 T で接します．



接弦定理により ∠OTP＝∠PQT と分かります．よって

∠OTP＝∠OQT　かつ　∠O 共有

から，三角形 OTP と三角形 OQT が相似であることが示されます．∠OTQ は直角ですから，∠OPT も直角です．図のように Q から引いたもう一つの接線の接点を S とすると

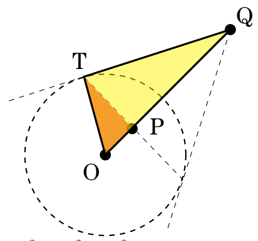
OP 共有　かつ　OT＝OS　かつ　ともに直角三角形

から，三角形 OTP と三角形 OSP は合同です．よって

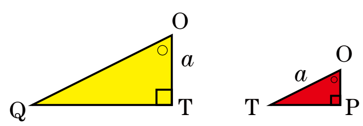
TP＝SP

が分かり，点 P が 2 点 T，S の中点であることが示せました．

逆も確認しておきましょう．点 P が 2 接点の中点であるとします．



三角形 OTP と三角形 OQT は相似です．ともに ∠O を共有する直角三角形だからです．



相似比を考えると

$\mathrm{OQ}:a=a:\mathrm{OP}$　　∴　$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=a^2$

となります．よって示せました．

*　　　　*　　　　*

反転には次のような性質があります．

反転によって，平面上の図形は次のように移る．

1．原点 O を通る直線
→　原点 O を通る直線
（自分自身に移る）

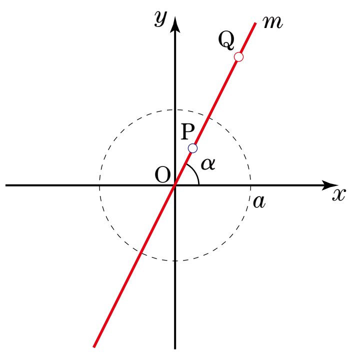
2．原点 O を通らない直線
→　原点 O を通る円

3．原点 O を通る円
→　原点 O を通らない直線

4．原点 O を通らない円
→　原点 O を通らない円

これは，平面幾何を駆使したり，座標を用いて考えたり，複素数平面を利用したりして証明することができます．ここでは，極方程式を利用した証明を紹介することにします．原点を極，x 軸の正の部分を始線とします．P と Q は点 O を端点とする半直線上にあり，その偏角が等しいことに注意します．

1．原点を通る直線は，$m:\theta=\alpha\ (0\leqq\alpha<2\pi)$ と表せる．点 P が m 上を動くとき，点 Q も m 上を動く．



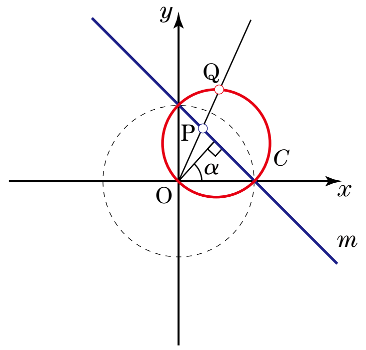
2．原点を通らない直線は，$b>0$ を満たす定数 b と定数 α を用いて，$m:\ r\cos(\theta-\alpha)=b$ と表せる．点 P が m 上を動くとき，$\mathrm{OP}\cos(\theta-\alpha)=b$ が成り立つから

$$\mathrm{OQ}=\frac{a^2}{\mathrm{OP}}=\frac{a^2}{b}\cos(\theta-\alpha)$$

である．これは点 Q が原点を通る円 C:

$$r=\frac{a^2}{b}\cos(\theta-\alpha)$$

上を動くことを表している．



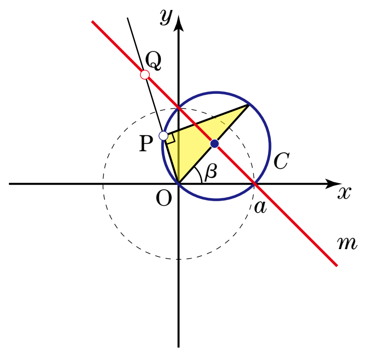
3．原点を通る円は，$c>0$ を満たす定数 c と定数 β を用いて，$C:\ r=c\cos(\theta-\beta)$ と表せる．点 P が C 上を動くとき，$\mathrm{OP}=c\cos(\theta-\beta)$ が成り立つから

$$\mathrm{OQ}=\frac{a^2}{\mathrm{OP}}=\frac{a^2}{c\cos(\theta-\beta)} \qquad \therefore\ \mathrm{OQ}\cos(\theta-\beta)=\frac{a^2}{c}$$

である．これは点 Q が原点を通らない直線 m:

$$r\cos(\theta-\beta)=\frac{a^2}{c}$$

上を動くことを表している．



4．原点を通らない円 C の中心の極座標を $(r_1,\ \theta_1)$，半径を d とすると，その極方程式は

$$r^2+r_1{}^2-2rr_1\cos(\theta-\theta_1)=d^2 \quad (r_1\fallingdotseq d)$$

である．点 P が C 上を動くとき

$$\mathrm{OP}^2+r_1^2-2\mathrm{OP}\,r_1\cos(\theta-\theta_1)=d^2$$

が成り立つから

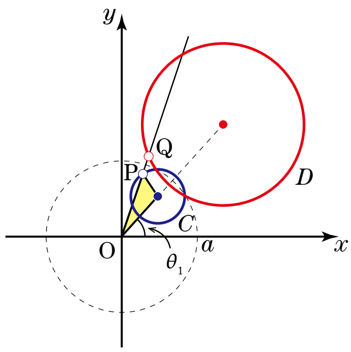
$$\frac{a^4}{\mathrm{OQ}^2}+r_1^2-2\frac{a^2}{\mathrm{OQ}}r_1\cos(\theta-\theta_1)=d^2$$
$$a^4+r_1^2\mathrm{OQ}^2-2\mathrm{OQ}a^2r_1\cos(\theta-\theta_1)=d^2\mathrm{OQ}^2$$
$$(r_1^2-d^2)\mathrm{OQ}^2+a^4-2\mathrm{OQ}a^2r_1\cos(\theta-\theta_1)=0$$
$$\mathrm{OQ}^2+\frac{a^4}{r_1^2-d^2}-2\mathrm{OQ}\frac{a^2r_1}{r_1^2-d^2}\cos(\theta-\theta_1)=0$$
$$\mathrm{OQ}^2+\frac{a^4r_1^2}{(r_1^2-d^2)^2}-2\mathrm{OQ}\frac{a^2r_1}{r_1^2-d^2}\cos(\theta-\theta_1)=\frac{a^4d^2}{(r_1^2-d^2)^2}$$

となる．

これは点 Q が原点を通らない円 D：

$$r^2+\frac{a^4r_1^2}{(r_1^2-d^2)^2}-2r\frac{a^2r_1}{r_1^2-d^2}\cos(\theta-\theta_1)=\frac{a^4d^2}{(r_1^2-d^2)^2}$$

上を動くことを表している．

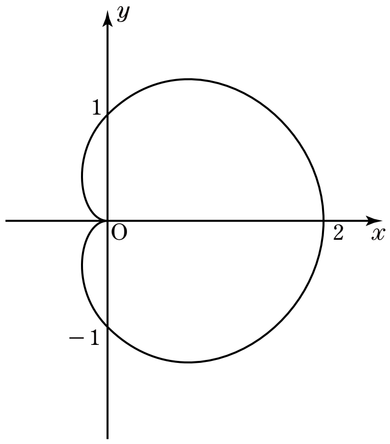


以上から示せた．

■

＊　　　＊　　　＊

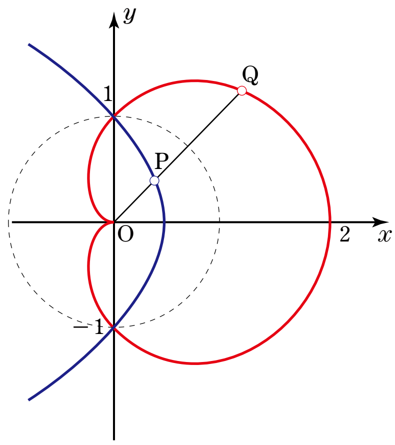
さて，点 Q の軌跡の極方程式は $r=1+\cos\theta$ でした．これは有名な曲線で「カージオイド（心臓形）」という名前がついています．$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で図示すると，次の図のような「ハート型」になります．



カージオイドには様々な性質がありますが，今回の問題で分かったことは

放物線　反転すると　ハート形

ということです．不思議な感じがしますね．



＊　　　＊　　　＊

今回の問題は，一問から非常に多くのことを学べる，素晴らしい問題でした．「たくさんの問題をひたすらこなして慣れる」という勉強法も悪くないですが，それだけでは味気ないです．今回の問題のような良問をじっくり味わい尽くしていく余裕をもちたいものですね．

笹谷