強者の戦略

それでは解説です．数学的帰納法で証明します．

問題（数 IAIIB）

関数 $f(x)$ は $p+q=1$ を満たすすべての正の数 p，q と，すべての実数 x，y に対して
$$f(px+qy) \leqq pf(x)+qf(y)$$
を満たしているとする．このとき，2 以上の自然数 n について，$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$ を満たすすべての正の数 p_1，p_2，……，p_n と，すべての実数 x_1，x_2，……，x_n に対して
$$f(p_1x_1+p_2x_2+\cdots\cdots+p_nx_n)$$
$$\leqq p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots\cdots+p_nf(x_n)$$
が成り立つことを示せ．

《解答》

$$pf\left(\boxed{x}\right)+q\,f\left(\boxed{y}\right) \geqq f\left(p\boxed{x}+q\boxed{y}\right) \quad \cdots\cdots(*)$$

個数 n に関する数学的帰納法で示す．

(Ⅰ)　$n=2$ のとき

$(*)$ より成り立つ．

(Ⅱ)　$n=k\ (\geqq 2)$ のとき題意が成り立つと仮定する．つまり，$p_1+p_2+\cdots+p_k=1$ を満たす任意の k 個の正の数 p_1，p_2，…，p_k と任意の k 個の実数 x_1，x_2，…，x_k に対して
$$f(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_kx_k)$$
$$\leqq p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_kf(x_k)$$
が成り立つと仮定する．

このとき $q_1+q_2+\cdots+q_{k+1}=1$ を満たす任意の $k+1$ 個の正の数 q_1，q_2，…，q_{k+1} と任意の $k+1$ 個の実数 y_1，y_2，…，y_{k+1} に対して
$$f(q_1y_1+q_2y_2+\cdots+q_{k+1}y_{k+1})$$
$$\leqq q_1f(y_1)+q_2f(y_2)+\cdots+q_{k+1}f(y_{k+1})$$
が成り立つことを示す．
$$q_1+q_2+\cdots+q_k=Q\ (>0)$$
とおくと
$$\frac{q_1}{Q}+\frac{q_2}{Q}+\cdots+\frac{q_k}{Q}=1$$
であるから

$$q_1f(y_1)+\cdots+q_kf(y_k)+q_{k+1}f(y_{k+1})$$
$$=Q\left(\frac{q_1}{Q}f(y_1)+\cdots+\frac{q_k}{Q}f(y_k)\right)+q_{k+1}f(y_{k+1})$$
$$\geqq Qf\left(\boxed{\frac{q_1}{Q}y_1+\cdots+\frac{q_k}{Q}y_k}\right)+q_{k+1}f\left(\boxed{y_{k+1}}\right)$$
（∵　仮定より）
$$\geqq f\left(Q\cdot\left(\boxed{\frac{q_1}{Q}y_1+\cdots+\frac{q_k}{Q}y_k}\right)+q_{k+1}\cdot\boxed{y_{k+1}}\right)$$
（∵　$Q+q_{k+1}=1$ と $(*)$ より）
$$=f(q_1y_1+\cdots+q_ky_k+q_{k+1}y_{k+1})$$
より，$n=k+1$ でも成り立つ．

(Ⅰ)，(Ⅱ) より，題意は示せた．

《解説》

数学的帰納法の中でも難度の高い

「個数に関する数学的帰納法」

と呼ばれるものを用いて証明しています．

通常の帰納法で証明しようとすると，以下のように失敗します．

(Ⅱ) における数列 $\{p_n\}$ にだけ注目すると
$$p_1+p_2+\cdots+p_k=1 \quad \cdots\cdots ①$$
を満たす任意の正の数 p_1，p_2，…，p_k に対して仮定をし
$$p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}=1 \quad \cdots\cdots ②$$
を満たす任意の正の数 p_1，p_2，…，p_k，p_{k+1} に対して証明しようとすると，$p_{k+1}>0$ より，① かつ ② を満たす p_1，…，p_{k+1} は存在しないため，話が続きません．

具体例でいうと

・2 個 → $p_1+p_2=1$ を満たす正の数 p_1，p_2

・3 個 → $p_1+p_2+p_3=1$ を満たす正の数 p_1，p_2，p_3

の 2 つを同時に考えたとき，p_1 と p_2 が同一であることはないのです．

このように，$n=k$ と $n=k+1$ で，同一の数の組では話が続かず，個数を増やすと改めて数の組をとり直す必要があるときに個数の数学的帰納法を用います．

本問では k 個の係数の和が 1 でないと仮定が使えないため，q_1，…，q_k の和で係数を割ることで，仮定が使える形をつくっています．

すべての自然数 n で成り立つことを数学的帰納法で証明する場合

$P(k)$ の成立を仮定　　……③

$P(k+1)$ の成立を証明　……④

において

> **個数に関する数学的帰納法**
>
> 個数を決めてから数の組をとる．
>
> ③ における
>
> $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$
>
> と，④ における
>
> $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k,\ a_{k+1}$
>
> について，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$ は同一とは限らない．
>
> 混乱を避けるため，④ のときは
>
> $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_k,\ b_{k+1}$
>
> と文字を変えることもある．

見極め方は，$n=k$ で仮定したあとの $n=k+1$ の証明が上手くいくかどうかです．

仮定と同一の数の組で上手く行かなければ**個数に関する数学的帰納法**となりますし，$k \geqq 1$ だと上手くいかないや，仮定が 1 個だと上手くいかない，だと

・k の範囲を変える

・仮定を 2 個にする

・仮定する条件を増やす

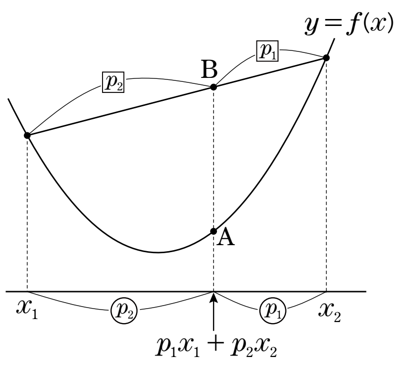
など，工夫が必要になります．

$n=k \to n=k+1$ で考えづらければ

$n=1 \to n=2$ や $n=2 \to n=3$

の具体例で考えてみましょう．

また，今回証明した不等式は Jensen の不等式と呼ばれるグラフの凸性から得られる有名不等式です．



$y=f(x)$ が表すグラフが下に凸のとき $p_1>0$，$p_2>0$，$p_1+p_2=1$ から 2 点 A，B の y 座標に注目すると $n=2$ のときの

$$f(p_1x_1+p_2x_2) \leqq p_1f(x_1)+p_2f(x_2)$$

を得ます．

ざっくり言うと，グラフ上の 2 点を結んだときグラフが下に凸ならば

(曲線) ≦ (線分)

が成り立ち，等号成立は 2 点が一致するときです．

$f(x) \to -f(x)$ をすることで，上に凸のときも考えることができます．

これを一般化したものが本問の Jensen の不等式でした．いろいろな不等式の背景にこの不等式が使われていることがあるので，証明方法と合わせておさえておきましょう．

最後に，個数に関する数学的帰納法を用いる問題をもう 1 つ載せておきます．

仮定を利用するためには工夫が必要となるので考えてみてください．

> ## 問題
>
> $n \geqq 2$ とする．n 個の実数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ は
>
> $|x_i|<1\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$
>
> を満たしている．このとき
>
> $$x_1+x_2+\cdots+x_n < x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n + n - 1$$
>
> が成り立つことを示せ．

《解答》

個数 n に関する数学的帰納法で示す．

(I)　$n=2$ のとき

$|x_1|<1,\ |x_2|<1$ より

$$\begin{aligned}&(x_1 \cdot x_2+1)-(x_1+x_2)\\ &=(x_1-1)(x_2-1)\\ &>0\end{aligned}$$

より，$x_1+x_2<x_1 \cdot x_2+1$ が成り立つ．

(II)　$n=k\ (\geqq 2)$ で成り立つと仮定すると

$$x_1+x_2+\cdots+x_k < x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_k + k - 1 \quad \cdots\cdots ①$$

である．このとき

$|y_k|<1\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k+1)$

を満たす $k+1$ 個の実数 y_1, y_2, $\cdots$, y_{k+1} が

$$y_1+y_2+\cdots+\boxed{y_k+y_{k+1}}$$
$$<y_1\cdot y_2\cdot\cdots\cdot y_k\cdot y_{k+1}+(k+1)-1$$

が成り立つことを証明する．

$|y_k|<1$, $|y_{k+1}|<1$ であるから，(I) より

$$\boxed{y_k+y_{k+1}}<\boxed{y_k\cdot y_{k+1}+1}$$

が成り立つ．よって

$$y_1+y_2+\cdots+y_{k-1}+\boxed{y_k+y_{k+1}}$$
$$<y_1+y_2+\cdots+y_{k-1}+\boxed{y_k\cdot y_{k+1}+1}$$

である．さらに，k 個の実数

$$y_1,\ \cdots,\ y_{k-1},\ y_k\cdot y_{k+1}$$

は

$$|y_1|<1,\ \cdots,\ |y_{k-1}|<1,\ |y_k\cdot y_{k+1}|<1$$

を満たしているから，① より

$$y_1+y_2+\cdots+y_{k-1}+\boxed{y_k\cdot y_{k+1}+1}$$
$$=(\underbrace{y_1+y_2+\cdots+y_{k-1}+y_k\cdot y_{k+1}}_{k\text{ 個の和とみなす}})+1$$
$$<(y_1\cdot y_2\cdot\cdots\cdot y_{k-1}\cdot y_k\cdot y_{k+1}+k-1)+1$$
$$=y_1\cdot y_2\cdot\cdots\cdot y_{k-1}\cdot y_k\cdot y_{k+1}+(k+1)-1$$

である．よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(I), (II) より，題意は示せた．

《解説》

いかがだったでしょうか．(I) を用いて $y_k\cdot y_{k+1}$ を作り，それを 1 個とみなすことで k 個の和を用意して，仮定を用いるところがポイントです．

$$\underbrace{y_1+y_2+\cdots+y_k}_{k\text{ 個の和}}+y_{k+1}$$
$$<y_1\cdot y_2\cdot\cdots\cdot y_k+k-1+y_{k+1}\quad(\because\ \text{仮定より})$$
$$=\underbrace{\boxed{(y_1\cdot y_2\cdot\cdots\cdot y_k)+y_{k+1}}}_{2\text{ 個の和とみなす}}+k-1$$
$$<\boxed{y_1\cdot y_2\cdot\cdots\cdot y_k\cdot y_{k+1}+1}+k-1$$
$$(\because\ |y_1\cdot y_2\cdot\cdots\cdot y_k|<1,\ |y_{k+1}|<1\text{ より，(I) から})$$
$$=y_1\cdot y_2\cdot\cdots\cdot y_k\cdot y_{k+1}+(k+1)-1$$

のように，仮定と (I) を用いる順番を逆にしても示すことができます．

いずれにしてもポイントとなるのは

$$x_1+x_2<x_1\cdot x_2+1$$
$$x_1+x_2+\cdots+x_k<x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_k+k-1$$

のことを，2 個と k 個で成り立つと個数で認識することです．絶対値が 1 未満という前提条件の確認も忘れないようにしましょう．

それでは今回はここまでにしたいと思います．

（数学科　松浦）